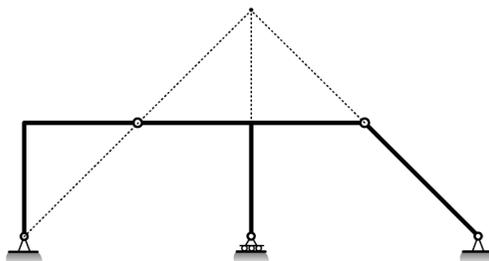
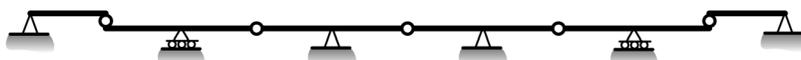
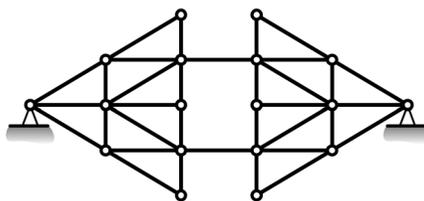


110 年公務人員高等考試試題結構學參考解答

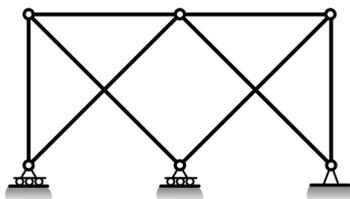
一、下圖中有(I)、(II)、(III)、(IV)四個平面結構，小圓符號代表鉸接或滾接，否則為剛接。請判定它們為不穩定結構或穩定結構？若為不穩定結構，請說明不穩定原因；若無穩定結構，請判別其靜不定的次數 R 。（ $R=0$ ，即表示為靜定結構。）(20 分)



(II)



(III)



(IV)

• 110 年土木高考試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 結構型式：(I) beam；(II) frame；
(III)、(IV) truss

(2) 待求

- 穩定性/靜定性

Key

- 力的觀點：無法平衡 ⇨ 不穩定
- 變位觀點：剛體運動 ⇨ 不穩定

參考解答

(1)圖(I)結構

∵垂直力 P 作用下 (圖 a)，會產生剛體運動。

∴不穩定



圖 a

(2)圖(II)結構

∵垂直力 P 作用下 (圖 b)，所有反力全部交於 O 點，此時 $[\Sigma M_O \neq 0]$ 。

∴不穩定

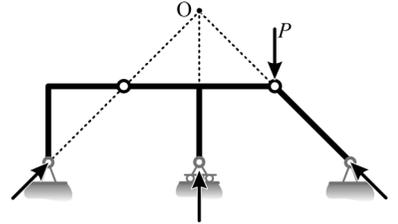


圖 b

(3)圖(III)結構

∵垂直力 P 作用下 (圖 c)，考慮左半分離體圖，此時 $[\Sigma F_y \neq 0]$ 。

∴不穩定

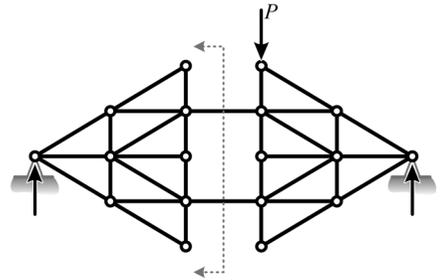


圖 c

(4)圖(IV)結構

∵垂直力 P 作用下 (圖 d)，桿件 EA 承受軸壓力 N ，此時 A 點 $[\Sigma F_x \neq 0]$ 。

∴不穩定

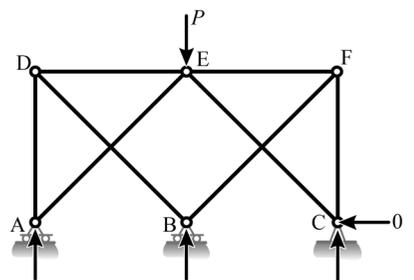


圖 d

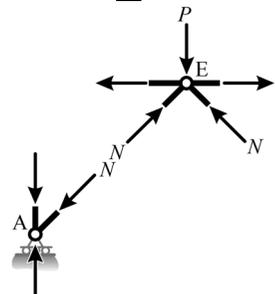
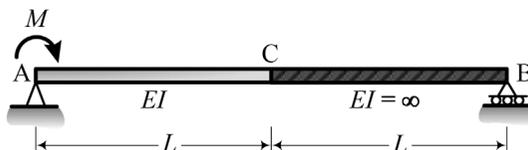


圖 e

Ans : (I)~(IV)皆為不穩定

※本題請參考“實力結構學《系統剖析》上冊【P2-6】”

二、下圖為一水平梁，此梁 AC 段及 BC 段之斷面性質不同，AC 段為 EI 、BC 段則為剛性 ($EI = \infty$)，相關尺寸配置如圖所示。若於梁的 A 端施加一彎矩 M ，試以共軛梁法求解此梁最大的垂直位移及其與 A 點的距離，另亦求解 A 點之轉角。(本題以其他方法求解，一律不予計分。)(25 分)



• 110 年土木高考試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 剛度： EI, ∞
- 外力： $M \curvearrowleft$

(2) 待求

- 變位： θ_A, Δ_{\max} 及其位置

(3) 方法

- **限** 共軛梁法

(4) 思路

- (外力) \rightarrow (內力) \rightarrow (變位)

Key

$\Delta_{\max} = \bar{M}_{\max}$
會產生在 $\theta = 0$ 處。

參考解答

(1) (外力) \rightarrow (內力)

- 依據個別法
繪製彎矩圖 (圖 a)。

(2) (內力) \rightarrow (變位)

- 依據共軛梁法
繪製共軛梁 (圖 b)，其中

$$F_1 = \left(\frac{M}{EI}\right)(L) = \frac{ML}{EI}$$

$$F_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2EI}\right)(L) = \frac{ML}{4EI}$$

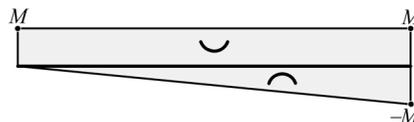


圖 a 彎矩圖

Note

採用個別法的好處在於後續計算彎矩圖面積會比較簡單。

$$\text{圖 b} [\sum M_B = 0]: \bar{R}_A(2L) - F_1\left(\frac{3L}{2}\right) + F_2\left(\frac{4L}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{R}_A = \frac{7ML}{12EI} = \frac{0.583ML}{EI} = \theta_A$$

再取圖 c 分離體圖，其中

$$F_3 = \left(\frac{M}{EI}\right)(x) = \frac{Mx}{EI}$$

$$F_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{Mx}{2EI}\right)(x) = \frac{Mx^2}{4EI}$$

$$\bar{M}_x = \bar{R}_A(x) - F_3\left(\frac{x}{2}\right) + F_4\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$= \frac{M}{EI}\left(\frac{7Lx}{12} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\bar{M}_x}{dx} = 0, \quad \frac{7L}{12} - x + \frac{x^2}{4L} = 0$$

$$x = 0.709L$$

$$\bar{M}_{\max} = \bar{M}_{x=0.709L} = \frac{0.1919ML^2}{EI} = \Delta_{\max}$$

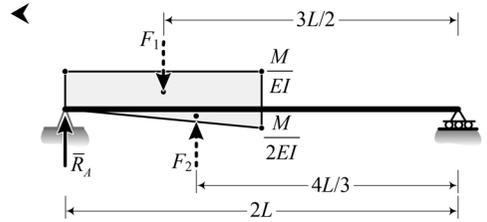


圖 b 共軛梁

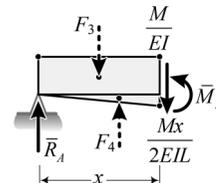


圖 c

Ans : (a) $\Delta_{\max} = \frac{0.1919ML^2}{EI}$ (↓)
 距離 A 點 $x = 0.709L$
 (b) $\theta_A = \frac{0.583ML}{EI}$ (↻)

※本題請參考“實力結構學《系統剖析》上冊【P4-36】”

五倍實力 • 五省錢

Since1991 實力創班三十一

面對最嚴重的疫情，就像在險峻的浪頭上，若無法乘風破浪就等著被大浪淹沒，實力歷年的榜單大家都有目共睹，現在以最優惠的方案具體回饋，希望大家都能平安渡過難關！

【五】+【實】=抗疫省錢大作戰

使用一張不限面額的「五倍券」

來「實力」報名，即享有3重好康優惠。

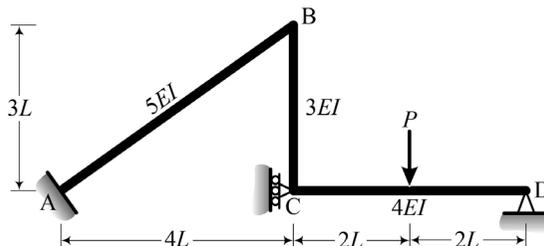
五倍券·五省錢·五告讚

Q詳情活動辦法請洽全國實力櫃檯



活動網址

三、如圖顯示一剛架結構，B 點及 C 點為剛接，剛架尺寸配置及各桿件斷面之 EI 值如圖所示。若於 CD 桿件中點施加一集中載重 P ，忽略各桿件軸向變形，試用彎矩分配法求解 A 點、B 點、C 點之端彎矩 M_{AB} 、 M_{BA} 及 M_{CB} 及 C 點垂直位移 Δ_c ，並請繪製此剛架結構受力後之彈性變形圖。(本題以其他方法求解，一律不予計分。)(30 分)



• 110 年土木高考試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 剛度： $5EI$ ， $3EI$ ， $4EI$
- 外力： $P \downarrow$

(2) 待求

- 內力： M_{AB} ， M_{BA} ， M_{CB}
- 變位： Δ_c
- 變形圖

(3) 方法

- **限** 彎矩分配法

(4) 思路

- (外力) \rightarrow (內力) \rightarrow (變位)

Key

本題有三個自由度，若用傳統的彎矩分配法，計算量超大(唯一好處是不必解聯立)，建議使用改良式的彎矩分配法(不是綜合彎矩分配法喔)。

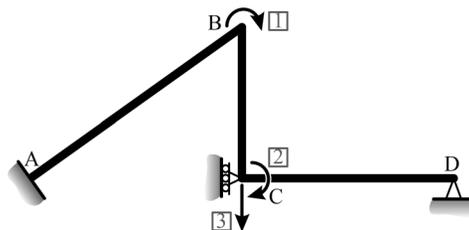


圖 a 自由度

參考解答

(1) 準備工作

- 判別自由度
本題有三個自由度(圖 a)，五個待求桿端彎矩(圖 b)。

- 依據疊加原理
(原結構) = (圖 c) + (圖 d) + (圖 e)

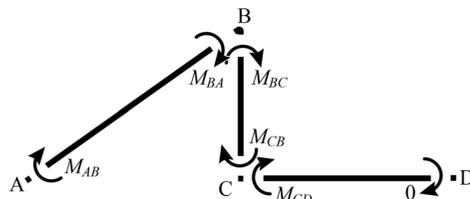


圖 b 待求桿端彎矩

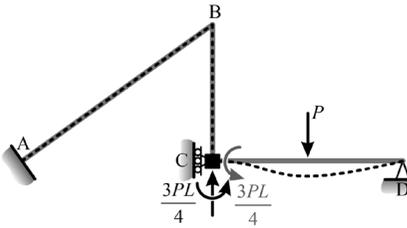


圖 c 外力的 F.E.M.

- 計算固端彎矩 (I)

$$M_{CD}^F = -\frac{3P(4L)}{16} = -\frac{3PL}{4}$$

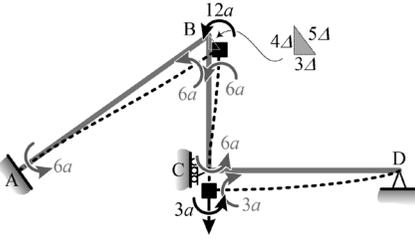


圖 d 側移的 F.E.M.

- 計算固端彎矩 (II)

$$\begin{aligned} M_{AB}^F &: M_{BC}^F &: M_{CD}^F \\ &= \frac{6(5EI)(5\Delta)}{(5L)^2} &: \frac{6(3EI)(3\Delta)}{(3L)^2} &: \frac{3(4EI)(4\Delta)}{(4L)^2} \\ &= -6a &: -6a &: 3a \end{aligned}$$

(令 $a = EI\Delta/L^2$)

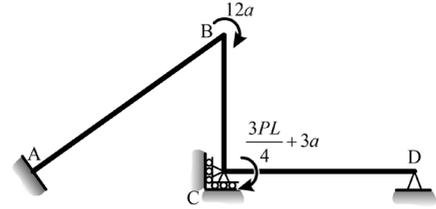


圖 e D.M./C.O.M.

- 計算相對 S 值

$$\begin{aligned} S_{BA} &: S_{BC} &: S_{CD} \\ &= \frac{4(5EI)}{(5L)} &: \frac{4(3EI)}{(3L)} &: \frac{3(4EI)}{(4L)} \\ &= 4 &: 4 &: 3 \end{aligned}$$

(2) (外力) → (內力)

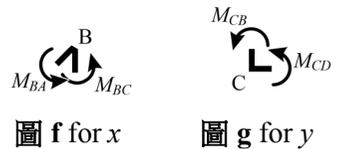
- 列表計算

Joint	A		B		C
E.M.	AB	BA	BC	CB	CD
D.F.	0	1/2	1/2	4/7	3/7
F.E.M.	-6a	-6a	-6a	-6a	-3PL/4 3a
D.M.		2x	2x	4y	3y
C.O.M.	x		2y	x	
ΣM	-38PL/39	-3PL/26	3PL/26	-20PL/39	20PL/39

⇨ 將各回合的分配全部累加
 ⇨ 將各回合的傳遞全部累加
 ◀ 代入 x、y 及 a 值的最後答案

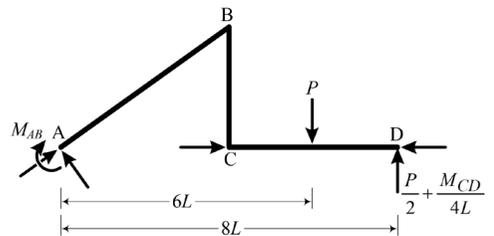
- 依據力的平衡

① 圖 f [ΣM_B = 0]: M_{BA} + M_{BC} = 0
 4x + 2y - 12a = 0 ... (a)



② 圖 g [ΣM_C = 0]: M_{CB} + M_{CD} = 0
 x + 7y - 3a = 3/4 PL ... (b)

③ 圖 h [ΣM_A = 0]:
 M_{AB} + P(6L) - (P/2 + M_{CD}/4L)(8L) = 0
 x - 6y - 12a = -7/2 PL ... (c)



聯立(a)~(c)式，可得

$$x = \frac{67}{78} PL, \quad y = \frac{3}{26} PL, \quad a = \frac{11}{36} PL$$

將 x 、 y 及 a 值代回上表，可得各桿端彎矩（圖 i），最後再繪製彎矩圖（圖 j）。

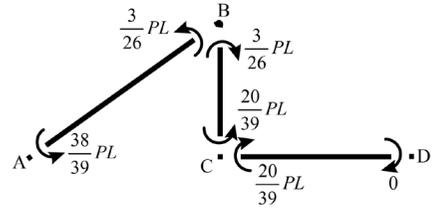


圖 i 桿端彎矩

(3) (內力) → (變位)

- 依據變位幾何關係

$$\begin{aligned} \Delta_C &= 4\Delta = 4 \left(\frac{L^2 a}{EI} \right) = \frac{4L^2}{EI} \left(\frac{11PL}{36} \right) \\ &= \frac{11PL^3}{9EI} \end{aligned}$$

最後，由彎矩圖推論變形圖（圖 k）。

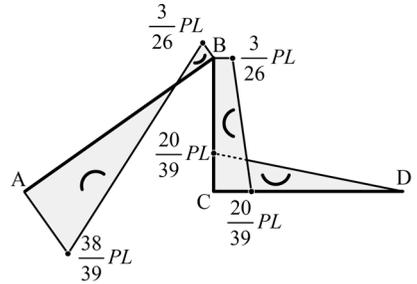


圖 j 彎矩圖

Ans : (a) $M_{AB} = -\frac{38}{39} PL$ (↺), $M_{BA} = -\frac{3}{26} PL$ (↺),
 $M_{CB} = -\frac{20}{39} PL$ (↺)
 (b) $\Delta_C = \frac{11PL^3}{9EI}$ (↓)
 (c) 變形圖如圖 k 所示

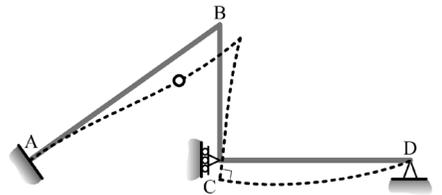


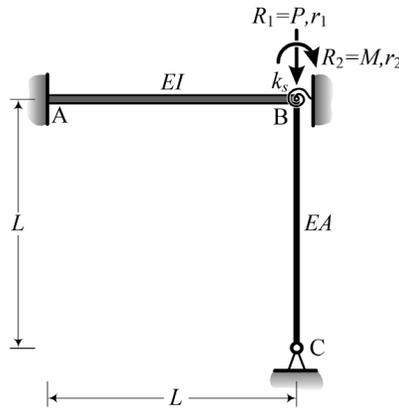
圖 k 變形圖

※本題請參考“實力結構學《系統剖析》下冊【例 I2.3-2】”

您終究要參加國家考試！
 為何不趁早加入實力呢？
 無論是大學或是研究所畢業
 靠一張文憑是很難立足土木界的
 透過國考取得技師證照或公職資格
 才能讓您行遍天下~暢行無阻~
 學校考試唸一次
 研究所考試再唸一次
 國家考試又要再來一次
 其實 您可以畢其功於一役
 加入實力 讓您大小考試都輕鬆如意

四、如圖顯示一懸臂梁 AB 與二力桿 BC 於 B 點鉸接處使用一螺旋彈簧連結，此彈簧勁度為 k_s ，桿件 AB 之斷面性質為 EI 、二力桿件 BC 為 EA 。已知 B 點垂直位移及旋轉之自由度分別為 r_1 及 r_2 ，相應之垂直力 R_1 為 P 、彎矩 R_2 為 M 。試依據圖中所示之自由度 r_1 及 r_2 ，以直接勁度法求此結構之勁度矩陣 $[K]_{2 \times 2}$ ；若考慮 $M = 0$ ，試求解僅有外力 P 作用下之勁度矩陣 $[K]_{1 \times 1}$ ，並請依照 $[K]_{1 \times 1}$ 求解 B 點之垂直位移 Δ_B 。（本題以其他方法求解，一律不予計分。）(25 分)

(已知： $EA/L = EI/L^3$ ； $k_s = 5EI/L$)



• 110 年土木高考試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 剛度： EI ， EA
- 勁度： $EA/L = EI/L^3$ ， $k_s = 5EI/L$
- 外力： $P \downarrow$ ， $M \curvearrowright$

(2) 待求

- 勁度矩陣： $[K]_{2 \times 2}$ ， $[K]_{1 \times 1}$
- 變位： Δ_B

(3) 方法

- **限**直接勁度法

(4) 思路

- (結構型式) \rightarrow (勁度矩陣)
- (外力) \rightarrow (變位)

Key

題目中所謂「鉸接處使用一螺旋彈簧連結」這句話是不精確的，應該說「B 點梁端有螺旋彈簧連結」才是正確的描述，因為鉸接點的左右轉角不同，必須清楚說明彈簧在哪一側才是對的。

參考解答

(1) 準備工作

- 設定座標

題目已給定 r, R 座標，可得外力矩陣

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix}$$

(2) (結構型式) → (勁度矩陣)

- 依據勁度係數的定義

圖 a：令 $r_1 = 1, r_2 = 0$ ，可得

$$K_{11} = \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{L} = \frac{12EI}{L^3} + \frac{EI}{L^3} = \frac{13EI}{L^3}$$

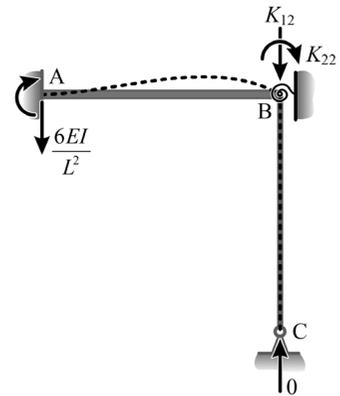
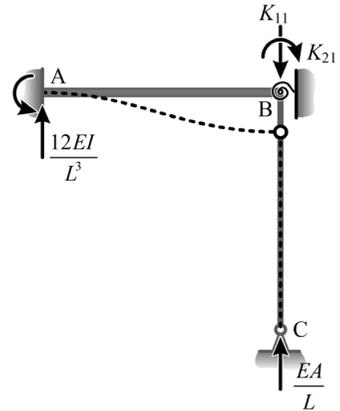
$$K_{21} = -\frac{6EI}{L^2}$$

圖 b：令 $r_2 = 1, r_1 = 0$ ，可得

$$K_{12} = -\frac{6EI}{L^2}$$

$$K_{22} = \frac{4EI}{L} + k_S = \frac{4EI}{L} + \frac{5EI}{L} = \frac{9EI}{L}$$

$$\therefore [K]_{2 \times 2} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 13 & -6L \\ -6L & 9L^2 \end{bmatrix}$$



(3) (外力) → (變位)

- 依據勁度矩陣連結外力-變位關係

$$[R] = [K][r]$$

或

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 13 & -6L \\ -6L & 9L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

或

$$P = \frac{13EI}{L^3} r_1 - \frac{6EI}{L^2} r_2 \quad \dots(a)$$

$$M = -\frac{6EI}{L^2} r_1 + \frac{9EI}{L} r_2 \quad \dots(b)$$

- 依題意，將 $M = 0$ 代入(b)式

$$-\frac{6EI}{L^2} r_1 + \frac{9EI}{L} r_2 = 0$$

$$\Rightarrow r_2 = \frac{2}{3L} r_1 \quad \dots(c)$$

將(c)式代入(a)式，可得

$$P = \frac{13EI}{L^3}r_1 - \frac{6EI}{L^2}\left(\frac{2}{3L}r_1\right)$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{9EI}{L^3}r_1$$

$$\therefore [K]_{1 \times 1} = \left[\frac{9EI}{L^3} \right] \quad \leftarrow$$

$$r_1 = \frac{PL^3}{9EI} \quad (\downarrow) = \Delta_B \quad \leftarrow$$

Ans : (a) $[K]_{2 \times 2} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 13 & -6L \\ -6L & 9L^2 \end{bmatrix}$

(b) $[K]_{1 \times 1} = \left[\frac{9EI}{L^3} \right]$

(c) $\Delta_B = \frac{PL^3}{9EI} \quad (\downarrow)$

※本題請參考“實力結構學《試題精選》【P6-273】”

You Tube 搜尋【實力土木】

《授課老師專業解說・上榜學員精彩分享》

影片內容分成四大系列

免費提供給要準備考試的您

- ▷準備要領系列 ▷觀念探討系列
- ▷試題解說系列 ▷經驗分享系列

 想要看第一手相關影片，
 歡迎訂閱實力土木頻道哦！