

## 110 年公務人員高等考試試題測量學參考解答

- 一、於某一基線場使用特定之全站儀 (Total Station) 與稜鏡組合進行率定測量作業，所得順向施測水平距離如下表，試列出觀測方程式及說明計算過程求此儀器組合測距之精度  $\pm(C+S \times D)$  mm，即求其中之 C 加常數 (單位 mm)、S 乘常數 (無單位 ppm) 之值，及計算此一率定成果之中誤差。(25 分)

項次	順向施測 (儀器站→稜鏡站)	已知水平距離 $D'$ (m)	實測水平距離 $D$ (m)
1	0→1	$D'_1$	$D_1$
2	0→2	$D'_2$	$D_2$
3	0→3	$D'_3$	$D_3$
4	1→3	$D'_4$	$D_4$
5	2→3	$D'_5$	$D_5$

• 110 年土木高考試題 •

### 問題剖析

1. 本題需率定出 C、S 值以及中誤差，可利用「最小二乘法平差」計算。
2. 實測距離與已知距離之差值為已知誤差。

### 參考解答

#### (一) 計算 C、S 值

##### 1. 列觀測方程式

測距精度  $\pm(C+S \times D) = \pm\sqrt{(C)^2 + (S \times D)^2}$ ，原觀測方程式應為：

$$\frac{(D_i - D'_i)}{1000} + v_i = \pm\sqrt{(C)^2 + \left(S \times \frac{D_i}{1000}\right)^2}$$

考慮等式右邊有正有負，及後續方便以矩陣列式，故先兩邊平方後再列觀測方程式：

$$\frac{(D_1 - D'_1)^2}{1000^2} + v_1 = C^2 + \left(S \times \frac{D_1}{1000}\right)^2$$

$$\frac{(D_2 - D'_2)^2}{1000^2} + v_2 = C^2 + \left(S \times \frac{D_2}{1000}\right)^2$$

$$\frac{(D_3 - D'_3)^2}{1000^2} + v_3 = C^2 + \left(S \times \frac{D_3}{1000}\right)^2$$

$$\frac{(D_4 - D'_4)^2}{1000^2} + v_4 = C^2 + \left( S \times \frac{D_4}{1000} \right)^2$$

$$\frac{(D_5 - D'_5)^2}{1000^2} + v_5 = C^2 + \left( S \times \frac{D_5}{1000} \right)^2$$

2. 以矩陣表示

$$[V] = [A][X] - [L]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (D_1/1000)^2 \\ 1 & (D_2/1000)^2 \\ 1 & (D_3/1000)^2 \\ 1 & (D_4/1000)^2 \\ 1 & (D_5/1000)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^2 \\ S^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{(D_1 - D'_1)^2}{1000^2} \\ \frac{(D_2 - D'_2)^2}{1000^2} \\ \frac{(D_3 - D'_3)^2}{1000^2} \\ \frac{(D_4 - D'_4)^2}{1000^2} \\ \frac{(D_5 - D'_5)^2}{1000^2} \end{bmatrix}$$

假定權與測線長成反比，列權矩陣  $[p] =$

$$\begin{bmatrix} 1/D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/D_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/D_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/D_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/D_5 \end{bmatrix}$$

3. 最小二乘法平差矩陣計算

若目標函數  $[vv] = V^T V$  為最小，則有最佳解，故將  $V^T V$  展開，並對令  $X$  一次微分為零，

得法方程式： $A^T A X - A^T L = 0$

可令法方程式  $NX = U$

則  $N = A^T P A$  ;  $U = A^T P L$

$$N = A^T P A$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \left(\frac{D_1}{1000}\right)^2 & \left(\frac{D_2}{1000}\right)^2 & \left(\frac{D_3}{1000}\right)^2 & \left(\frac{D_4}{1000}\right)^2 & \left(\frac{D_5}{1000}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/D_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/D_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/D_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/D_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{D_1}{1000}\right)^2 \\ \left(\frac{D_2}{1000}\right)^2 \\ \left(\frac{D_3}{1000}\right)^2 \\ \left(\frac{D_4}{1000}\right)^2 \\ \left(\frac{D_5}{1000}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$U = A^T P L$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \left(\frac{D_1}{1000}\right)^2 & \left(\frac{D_2}{1000}\right)^2 & \left(\frac{D_3}{1000}\right)^2 & \left(\frac{D_4}{1000}\right)^2 & \left(\frac{D_5}{1000}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/D_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/D_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/D_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/D_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(D_1 - D'_1)^2}{1000^2} \\ \frac{(D_2 - D'_2)^2}{1000^2} \\ \frac{(D_3 - D'_3)^2}{1000^2} \\ \frac{(D_4 - D'_4)^2}{1000^2} \\ \frac{(D_5 - D'_5)^2}{1000^2} \end{bmatrix}$$

#### 4. 利用反矩陣解法方程式

$$NX = U \Rightarrow X = N^{-1}U$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} C^2 \\ S^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{解出 } X \text{ 矩陣後需開根號，可求出 } C、S$$

### (二) 成果中誤差

#### 1. 單位權中誤差

本題觀測量  $n=5$ ；未知數  $u=2$ ，並將求解出之  $X$  矩陣代回，可得  $V$  矩陣，則：

$$m = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}} = \pm \sqrt{\frac{V^T pV}{5-2}}$$

#### 2. 成果中誤差

求解出  $N$  之反矩陣後，則未知數成果中誤差為：

$$\sigma_{C^2} = \pm m \sqrt{N_{11}^{-1}} \Rightarrow \sigma_C = \pm \sqrt{m \sqrt{N_{11}^{-1}}}$$

$$\sigma_{S^2} = \pm m \sqrt{N_{22}^{-1}} \Rightarrow \sigma_S = \pm \sqrt{m \sqrt{N_{22}^{-1}}}$$

二、於二維水平面中測量不共線三點 A、B、C 間之水平距離分別為  $AB=102.32\text{ m}$ 、 $AC=140.24\text{ m}$ 、 $BC=192.54\text{ m}$ ，若距離觀測為獨立且中誤差均為  $\pm 0.05\text{ m}$ ，試求三角形 ABC 面積及其中誤差。(25 分)

• 110 年土木高考試題 •

### 問題剖析

利用海龍公式計算面積，再以誤差傳播定律計算面積中誤差。(亦可利用餘弦定律求解)

### 參考解答

#### 1. 面積(列方程式)

$$(1) S = \frac{L_{AB} + L_{AC} + L_{BC}}{2} = \frac{a + b + c}{2} = \frac{102.32 + 140.24 + 192.54}{2} = 217.55\text{ m}$$

$$(2) A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} = [S(S-a)(S-b)(S-c)]^{1/2}$$

$$= [217.55(217.55 - 102.32)(217.55 - 140.24)(217.55 - 192.54)]^{1/2}$$

$$= 6962.048 = 6962.0\text{ m}^2$$

#### 2. 面積中誤差(誤差傳播定律)

$$(1) A = [S(S-a)(S-b)(S-c)]^{1/2} = [S^4 - S^3(a+b+c) + S^2(ab+bc+ca) - Sabc]^{1/2}$$

(2)  $S$  為  $a$ 、 $b$ 、 $c$  關係式，故偏微  $S$  項時，需注意連鎖律：

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial S}{\partial b} = \frac{\partial S}{\partial c} = 0.5$$

(3)

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{1}{2} \frac{4S^3(0.5) - [3S^2(0.5)(a+b+c) + S^3] + [2S(0.5)(ab+bc+ca) + S^2(b+c)] - [1(0.5)abc + Sbc]}{[S(S-a)(S-b)(S-c)]^{1/2}}$$

$$= 85.002$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{1}{2} \frac{4S^3(0.5) - [3S^2(0.5)(a+b+c) + S^3] + [2S(0.5)(ab+bc+ca) + S^2(a+c)] - [1(0.5)abc + Sac]}{[S(S-a)(S-b)(S-c)]^{1/2}}$$

$$= 70.184$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{1}{2} \frac{4S^3(0.5) - [3S^2(0.5)(a+b+c) + S^3] + [2S(0.5)(ab+bc+ca) + S^2(a+b)] - [1(0.5)abc + Sab]}{[S(S-a)(S-b)(S-c)]^{1/2}}$$

$$= -23.974$$

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a} \times \sigma_L\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \times \sigma_L\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c} \times \sigma_L\right)^2} \\ &= \pm \sqrt{(85.002 \times \sigma_L)^2 + (70.184 \times \sigma_L)^2 + (-23.974 \times \sigma_L)^2} \\ &= \pm 112.809 \times \sigma_L = \pm 112.809 \times 0.05 = \pm 5.64 = \pm 5.6 \text{ m}^2\end{aligned}$$

三、於二維平面直角 (E、N) 坐標系統中二已知點 A (100.00, 50.80)、B (480.00, 152.30)，今使用一台全站儀設置測站於 A 點，後視 B 點將水平角度盤歸零，觀測 C 點水平角讀數為 300°0'0"；移置測站於 B 點，後視 A 點將水平角度盤歸零，觀測 C 點水平角讀數為 65°0'0"，試繪草圖及列出觀測方程式計算 C 點平面坐標 (E<sub>c</sub>, N<sub>c</sub>)。(25 分)

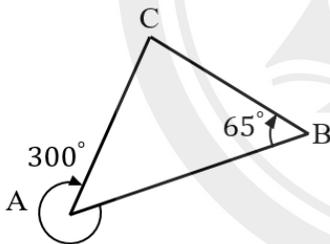
• 110 年土木高考試題 •

**問題剖析**

繪出草圖，為前方交會法，找平面三角關係，注意水平角觀測一律為順時針方向。

**參考解答**

1. 繪圖



2. 反算 A、B 坐標

$$\Delta E = E_B - E_A = 480 - 100 = 380.00 \text{ m}$$

$$\Delta N = N_B - N_A = 152.3 - 50.8 = 101.5 \text{ m}$$

$$L_{AB} = \sqrt{(\Delta E)^2 + (\Delta N)^2} = \sqrt{(380)^2 + (101.5)^2} = 393.322 \text{ m}$$

$$\theta_{AB} = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta E}{\Delta N}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{380}{101.5}\right) = 75^\circ 2' 42.45''$$

⇒ 以 A 為原點，B 位於第 1 象限，故  $\phi_{AB} = \theta_{AB} = 75^\circ 2' 42.45''$

3. 找平面三角關係

如圖， $\angle CAB = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$ ； $\angle BCA = 180^\circ - 60^\circ - 65^\circ = 55^\circ$

正弦定理：

**五倍實力 • 五省錢**

Since 1991 實力創班三十一

面對最嚴重的疫情，就像在險峻的浪頭上，若無法乘風破浪就等著被大浪淹沒，實力歷年的榜單大家都有目共睹，現在以最優惠的方案具體回饋，希望大家都能平安渡過難關！

【五】+【實】= 抗疫省錢大作戰  
使用一張不限面額的「五倍券」  
來「實力」報名，即享有 3 重好康優惠。  
五倍券·五省錢·五告讚

🔍 詳情活動辦法請洽全國實力櫃檯



$$L_{AC} = \frac{L_{AB}}{\sin \angle BCA} \times \sin \angle ABC = \frac{393.322}{\sin 55^\circ} \times \sin 65^\circ = 435.170 \text{ m}$$

$$\phi_{AC} = \phi_{AB} - \angle CAB = 75^\circ 2' 42.45'' - 60^\circ = 15^\circ 2' 42.45''$$

4. 正算 C 點坐標

$\phi_{AC} = 15^\circ 2' 42.45'' \Rightarrow$  第一象限  $\Rightarrow \theta_{AC} = \phi_{AC} \Rightarrow \Delta E$ 、 $\Delta N$  皆正

$$\Delta E_{AC} = (L_{AC})(\sin \theta_{AC}) = (435.17)(\sin 15^\circ 2' 42.45'') = 112.961$$

$$\Delta N_{AC} = (L_{AC})(\cos \theta_{AC}) = (435.17)(\cos 15^\circ 2' 42.45'') = 420.253$$

$$E_C = E_A + \Delta E_{AC} = 100 + 112.961 = 212.961 = 212.96 \text{ m}$$

$$N_C = N_A + \Delta N_{AC} = 50.8 + 420.253 = 471.053 = 471.05 \text{ m}$$

四、精密水準測量一般使用精密水準儀搭配平行玻璃板測微器(Parallel plate micrometer)與鋼鋼水準尺施測，試繪簡圖並說明平行玻璃板測微器之作用原理。(25 分)

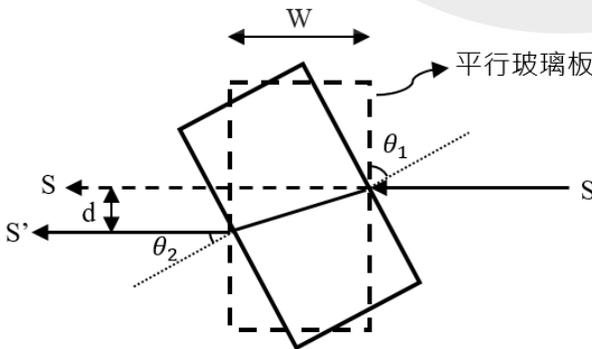
• 110 年土木高考試題 •

**問題剖析**

1. 一般光學水準儀若要提高測量精度，可於物鏡附平行玻璃板並搭配鋼鋼水準尺（精度高且熱膨脹係數低）做量測。
2. 於刻劃部分提高精度，與游標目的相同。

**參考解答**

1. 平行玻璃板測微器之基本原理



您終究要參加國家考試！  
 為何不趁早加入實力呢？  
 無論是大學或是研究所畢業  
 靠一張文憑是很難立足土木界的  
 透過國考取得技師證照或公職資格  
 才能讓您行遍天下~暢行無阻~  
 學校考試唸一次  
 研究所考試再唸一次  
 國家考試又要再來一次  
 其實 您可以畢其功於一役  
 加入實力 讓您大小考試都輕鬆如意

如上圖，矩形為平行玻璃板（寬度  $W$ ），該與測微螺旋連動（100 小格），虛線時表示視線無升降為水平（ $S \rightarrow S$ ），當平行玻璃板旋轉時為實線矩形，視線升降距離為鋼鋼水準尺最小刻劃  $d(S \rightarrow S')$ ，入射角為  $\theta_1$ ，折射率假設為  $n$ ，則關係為：

$$d = W \times \theta_1 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

## 2. 應用

Step1 施作水準測量，將平行玻璃板之測微螺旋歸零（虛線矩形），以十字絲觀測一鋼鋼水準尺（刻劃 1 cm），假設估讀讀數為 123.4 cm。

Step2 旋轉測微螺旋使鋼鋼水準尺 123 cm 之刻劃線，恰落於楔形絲中間。

Step 3 假設測微螺旋轉動 45.6 格，則轉動量為  $\frac{4.56}{100} = 0.456$  cm，因此配合平行玻璃板可使估讀讀數為 123.456 cm，以提高測量精度。

### You Tube 搜尋【實力土木】

《授課老師專業解說・上榜學員精彩分享》

影片內容分成四大系列

免費提供給要準備考試的您

▷準備要領系列 ▷觀念探討系列  
▷試題解說系列 ▷經驗分享系列

-----  
 想要看第一手相關影片，  
 歡迎訂閱“實力土木”頻道哦！