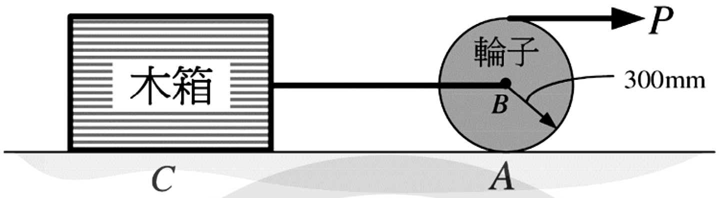
# 109 年地方特考三等考試靜力學與材料力學參考解答

一、圖中，木箱及輪子的質量分別為 **80 kg** 及 **30 kg**。設木箱與地面的最大靜摩擦係數為 $\mu_{sC}=0.25$，輪子與地面的最大靜摩擦係數為 $\mu_{sA}=0.5$，求產生臨界運動之最小力 $P=$？設木箱與地面的最大靜摩擦係數 $\mu_{sC}$ 還是 **0.25**，若臨界運動時，欲使木箱及輪子皆為滑動，則輪子與地面的最大靜摩擦係數為 $\mu_{sA}=$？**(25 分)**




【解題老師】許弘老師　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　·109 年三等特考試題·

**問題剖析**

木箱或輪子有一者會先滑動，在不知誰先滑動下，應先建立木箱與輪子地面摩擦力的平衡關係。接著假設其一者先達最大靜摩擦力後檢算任一者是否仍小於自身的最大靜摩擦力，若是即假設正確為正解。若要反求兩者同時滑動的輪子靜摩擦係數，就令兩者同時達各自的最大靜摩擦力即可反算。

**參考解答**

**1.** 先建立木箱與輪子地面摩擦力的平衡關係

木箱的重量 $W_1=80\times9.81=784.8\,\text{N}$；輪子的重量 $W_2=30\times9.81=294.3\,\text{N}$。

因外力向右預設木箱會被向右拉動，其摩擦力應反向朝左。先看圖(a)木箱分離體 $N_C=W_1=784.8\,\text{N}$；繩拉力 $T=f_C$。

接著看圖(a)輪子分離體，$N_A=W_2=294.3\,\text{N}$；對輪心 $B$ 點取力矩可知 $P$ 和 $f_A$ 必定大小相同、方向相「同」。$\left[+\circlearrowleft\Sigma M_B=0\right]:\left(f_A\right)\left(300\right)-\left(P\right)\left(300\right)=0 \Rightarrow P=f_A$。

$\left[+\rightarrow\Sigma F_x=0\right]: P+f_A-T=0 \Rightarrow T=P+f_A=2f_A$。

藉由同一條繩拉力相同，可得 $T=f_C=2f_A$ 之摩擦力關係式。

**2.** 假設滑動模式反算臨界作用力

(1) 假設木箱先滑動

因木箱與地面的靜摩擦係數較小，所以假設木箱先滑動恰達最大靜摩擦力。

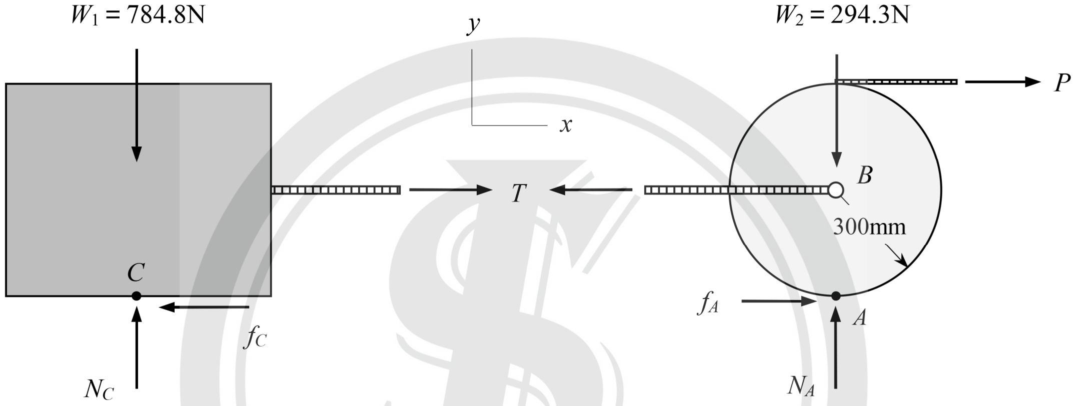
$f_C=F_{s,C}=\left(\mu_{s,C}\right)\left(N_C\right)=\left(0.25\right)\left(784.8\right)=196.2\,\text{N}$。

輪子與地面的最大靜摩擦力為$F_{s,A}=(\mu_{s,A})(N_A)=(0.5)(294.3)=147.15\,\text{N}$。

輪子與地面的摩擦力為$f_A=0.5f_C=(0.5)(196.2)=98.1\,\text{N}<F_{s,A}=147.15\,\text{N}$。因輪子與地面的摩擦力「小」於其自身的最大靜摩擦力 147.15N，表示此時輪子與地面尚未滑動假設正確！

(2) 反算臨界作用力

依前述力平衡關係，達臨界狀態的最小外力為$P_{\min}=f_A=98.1\,\text{N}$。 ◄




圖(a)

**3. 木箱與輪子同時滑動的輪子靜摩擦係數**

既然恰好同時滑動，兩者摩擦力會同時達各自的最大靜摩擦力。

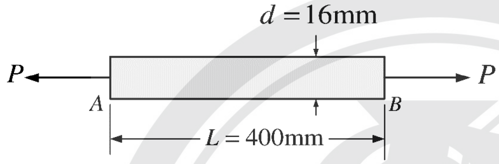
$f_A=F_{s,A}=(\mu_{s,A})(N_A)=(\mu_{s,A})(294.3)\,\text{N}$；$f_C=F_{s,C}=196.2\,\text{N}$。

依摩擦力關係式$f_C=2f_A \Rightarrow 196.2=(2)\left[(\mu_{s,A})(294.3)\right] \Rightarrow \mu_{s,A}=1/3$。 ◄

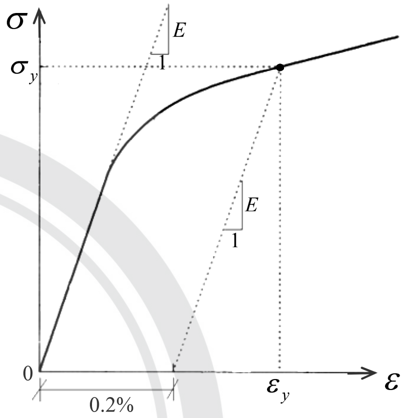
二、如圖(Ⅰ)所示之實心圓桿 AB，其長 $L = 400$ mm，直徑 $d = 16$ mm。圓桿 AB 受到拉力 $P = 60$ kN 作用，若實心圓桿 AB 之應力應變關係為：

$$\sigma = \frac{124000\varepsilon}{1+300\varepsilon} \quad 當 \quad 0 \le \varepsilon \le 0.03$$（$\sigma$ 的單位為 MPa）

若圓桿 AB 之楊氏模數 $E = 124$ GPa，求 0.2%偏差降伏應力（offset yield stress）$\sigma_y$（參考示意圖(Ⅱ)）；當拉力 $P = 60$ kN 作用時，圓桿 AB 之伸長量 $\delta$ = ？又，卸載後，圓桿 AB 之永久伸長量 $\delta_P$ = ？(25 分)




圖(Ⅰ)




圖(Ⅱ)

【解題老師】林冠丞老師 ‧109 年三等特考試題‧

**問題剖析**

**(1)已知**

- 材料性質：$\sigma = \dfrac{124,000\varepsilon}{1+300\varepsilon}$，$0 \le \varepsilon \le 0.03$

  $E = 124\ \text{GPa} = 124,000\ \text{MPa}$
- 幾何性質：$L = 400$ mm，$d = 16$ mm
- 內　　力：$P = 60$ kN

**(2)待求**

- 偏差降伏應力：0.2%偏差之 $\sigma_y$
- 變　　形：$\delta$，$\delta_P$

**(3)思路**

- （應力-應變關係）→（偏差降伏應力）
- （內力）→（應力）→（應變）→（變形）

**Key**

取 0.2%的應變偏移量，將平行初始切線的偏移直線與應力-應變曲線的交點，定義為偏差降伏點，此點應力即為偏差降伏應力。

**參考解答**

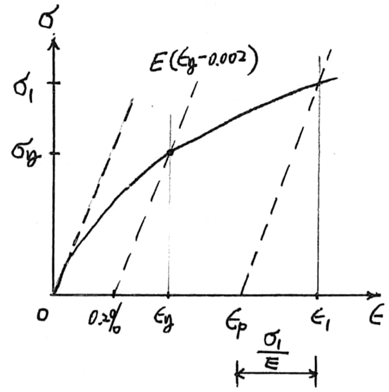


圖 a 分離體圖

**(1)（應力-應變關係）→（偏差降伏應力）**

- 依據偏差降伏應力的定義（圖 a）

令

$$\sigma_y = \frac{124,000\varepsilon_y}{1+300\varepsilon_y} = 124,000(\varepsilon_y - 0.002)$$

$$300\varepsilon_y^2 - 0.6\varepsilon_y - 0.002 = 0$$

➪ $\varepsilon_y = 0.003769$ 或 $-0.001769$（不合）

$$\therefore \sigma_y = \frac{124,000(0.003769)}{1+300(0.003769)} = 219.3\ \text{MPa}$$

**(2)（內力）→（應力）**

- 依據軸向應力公式

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{60\times10^3}{\pi(8)^2} = 298.4\ \text{MPa} > \sigma_y$$

Note

$\because \sigma_1 > \sigma_y$

$\therefore$ 已進入塑性階段

**(3)（應力）→（應變）**

- 依據應力-應變關係

$$\sigma_1 = \frac{124,000\varepsilon_1}{1+300\varepsilon_1} = 298.4$$

➪ $\varepsilon_1 = 0.008654$

$$\varepsilon_P = \varepsilon_1 - \frac{\sigma_1}{E} = 0.008654 - \frac{298.4}{124,000} = 0.006248$$

**(4)（應變）→（變形）**

- 依據變形幾何

$$\delta = \varepsilon_1 L = (0.008654)(400) = 3.46\ \text{mm}$$

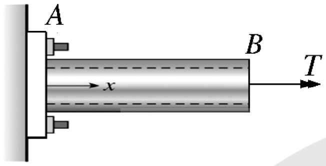
$$\delta_P = \varepsilon_P L = (0.006248)(400) = 2.50\ \text{mm}$$

**Ans：** (a)偏差降伏應力 $\sigma_y = 219.3\ \text{MPa}$

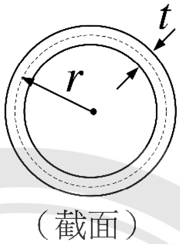
(b)伸長量 $\delta = 3.46\ \text{mm}$

(c)永久伸長量 $\delta_P = 2.50\ \text{mm}$

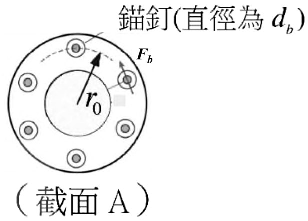
三、如圖(Ⅰ)所示之薄壁管 AB 受扭矩 $T$ 作用，薄壁管 AB 的長 $L = 0.5$ m，其截面為厚度 $t = 5$ mm，半徑 $r = 50$ mm 之薄壁圓管，如圖(Ⅱ)所示。已知薄壁圓管 AB 之剪應力 $\tau = 60$ MPa，剪力模數 $G = 30$ GPa，求：扭矩 $T$ 及 B 點之扭轉角 $\phi_B$（單位以度表之）。又，若薄壁圓管的底座（截面 A）是用 6 根直徑為 $d_b$ 之錨釘拴緊，錨釘的位置距截面圓心為 $r_0 = 70$ mm 處，如圖(Ⅲ)所示，若每根錨釘之允許剪應力 $(\tau_b)_{allow} = 48$ MPa，求每根錨釘之最小直徑 $d_b$。 (25 分)



圖(Ⅰ)



圖(Ⅱ)



圖(Ⅲ)

【解題老師】林冠丞老師 ‧109 年三等特考試題‧

## 問題剖析

**Key**
題目已表明為薄壁圓管，所以必須引用薄壁近似公式才符合題意。

**(1)已知**

- 材料性質： $G = 30\,\text{GPa}$， $(\tau_b)_{allow} = 48\,\text{MPa}$
- 幾何性質： $t = 5\,\text{mm}$， $r = 50\,\text{mm}$， $L = 0.5\,\text{m}$， $r_0 = 70\,\text{mm}$
- 應　　力： $\tau = 60\,\text{MPa}$

**(2)待求**

- 內　　力： $T$
- 變　　形： $\phi_B$（單位以度表示）
- 最小直徑： $d_b$

**(3)思路**

- （應力）→（內力）→（變形）
  →（最小直徑）

## 參考解答

**(1)準備工作**

- 計算剖面參數

$$A_m = \pi r^2 = \pi(50)^2 = 2500\pi\ \text{mm}^2$$

$$J_E = \frac{4A_m^2 t}{L_m} = \frac{4(2500\pi)^2(5)}{2\pi(50)} = 1{,}250{,}000\pi\ \text{mm}^4$$

**(2)**（應力）→（內力）

- 依據薄壁管扭轉剪應力公式

$$\tau = \frac{T}{2A_m t}$$

➪ $T = 2A_m t\tau = 2(2500\pi)(5)(60)$

$= 4.712\times10^6$ N-mm $= 4.712$ kN-m ◀

**(3)**（內力）→（變形）

- 依據薄壁管扭轉角公式

$$\phi = \frac{TL}{GJ_E} = \frac{(4.712\times10^6)(500)}{(30\times10^3)(1,250,000\pi)}$$

$= 0.019998\text{rad} = 1.146°$ ◀

**(4)**（內力）→（最小值徑）

- 依據內力等效

$$6\left(\frac{\pi}{4}d_b^2\right)(\tau_b)_{\text{allow}}(r_0) = T$$

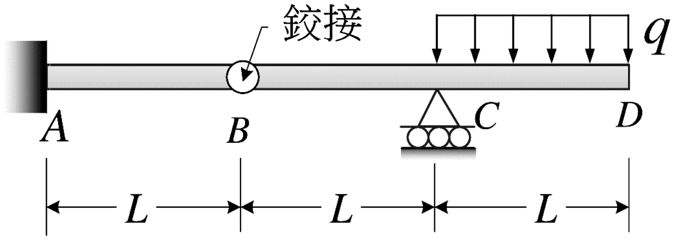
或

$$6\left(\frac{\pi}{4}d_b^2\right)(48)(70) = 4.712\times10^6$$

➪ $d_b = 17.25$ mm ◀

**Ans**：(a)扭矩 $T = 4.712$ kN-m
(b)扭轉角 $\phi = 1.146°$
(c)錨釘之最小直徑 $d_b = 17.25$ mm

四、如圖之梁 **AB** 及梁 **BCD** 於 **B** 點用鉸接連接，於 **CD** 段受到均布載重作用，梁 **AB** 及梁 **BCD** 之撓曲剛度皆為 $EI$ ，求 **B** 點的撓度 $\Delta_B$ 、**C** 點旋轉角 $\theta_C$ 、**D** 點撓度 $\Delta_D$ 及 **D** 點旋轉角 $\theta_D$（請標示方向）。**(25 分)**




【解題老師】林冠丞老師　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　•**109** 年三等特考試題•

**問題剖析**

> *Key*
> 本題欲求多點變位，建議使用基本變位公式配合疊加原理，即可快速得解。

**(1)**已知

• 剛　　度：$EI$

• 外　　力：$q\downarrow$

**(2)**待求

• 變　　位：$\Delta_B$ ，$\theta_C$ ，$\Delta_D$ ，$\theta_D$

**(3)**思路

•（外力）→（個別變位）→（整體變位）

**參考解答**

**(1)**（外力）→（個別變位）

• 依據基本變位公式

$(\text{原結構}) = (\text{圖a結構}) + (\text{圖b結構}) + (\text{圖c結構})$

①考慮圖 a 結構

$\Delta_{B1} = \theta_{C1} = 0$

$\Delta_{D1} = \dfrac{qL^4}{8EI}$（↓）

$\theta_{D1} = \dfrac{qL^3}{6EI}$（↻）

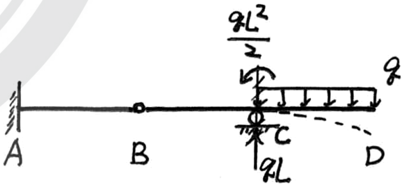



**圖 a**　CD 段套用懸臂梁公式

②考慮圖 b 結構

$\Delta_{B2} = 0$

$\theta_{C2} = \dfrac{(qL^2/2)L}{3EI} = \dfrac{qL^3}{6EI}$（↻）

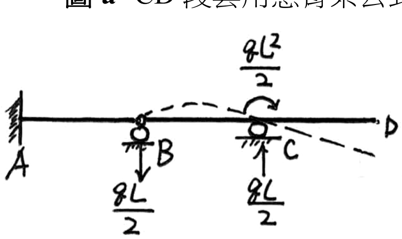



**圖 b**　BC 段套用簡支梁公式

$$\theta_{D2}=\theta_{C2}=\frac{qL^3}{6EI}\ (↻)$$

$$\Delta_{D2}=\theta_{C2}L=\frac{qL^4}{6EI}\ (\downarrow)$$

③考慮圖 c 結構

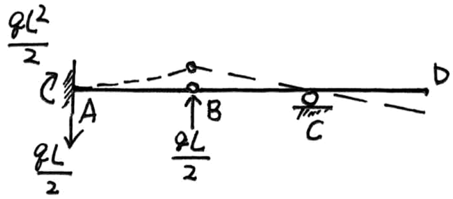



**圖 c** AB 段套用懸臂梁公式

$$\Delta_{B3}=\frac{(qL/2)L^3}{3EI}=\frac{qL^4}{6EI}\ (\uparrow)$$

$$\theta_{C3}=\frac{\Delta_{B3}}{L}=\frac{qL^3}{6EI}\ (↻)$$

$$\theta_{D3}=\theta_{C3}=\frac{qL^3}{6EI}\ (↻)$$

$$\Delta_{D3}=\theta_{C3}L=\frac{qL^4}{6EI}\ (\downarrow)$$

**(2)（個別變位）→（整體變位）**

- 依據疊加原理

$$\Delta_B=\Delta_{B1}+\Delta_{B2}+\Delta_{B3}=0+0+\frac{qL^4}{6EI}=\frac{qL^4}{6EI}\ (\uparrow)$$

$$\theta_C=\theta_{C1}+\theta_{C2}+\theta_{C3}=0+\frac{qL^3}{6EI}+\frac{qL^3}{6EI}=\frac{qL^3}{3EI}\ (↻)$$

$$\Delta_D=\Delta_{D1}+\Delta_{D2}+\Delta_{D3}=\frac{qL^4}{8EI}+\frac{qL^4}{6EI}+\frac{qL^4}{6EI}=\frac{11qL^4}{24EI}\ (\downarrow)$$

$$\theta_D=\theta_{D1}+\theta_{D2}+\theta_{D3}=\frac{qL^3}{6EI}+\frac{qL^3}{6EI}+\frac{qL^3}{6EI}=\frac{qL^3}{2EI}\ (↻)$$

**Ans：** $\Delta_B=\dfrac{qL^4}{6EI}$（↑），$\theta_C=\dfrac{qL^3}{3EI}$（↻）

$\Delta_D=\dfrac{11qL^4}{24EI}$（↓），$\theta_D=\dfrac{qL^3}{2EI}$（↻）