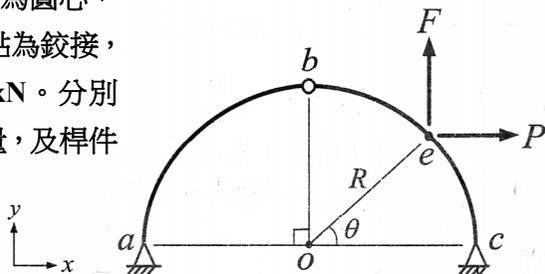


108 年地方政府公務人員三等考試靜力學與材料力學參考解答

一、如圖所示之二分之一圓弧形桿件，O 點為圓心，半徑 $R = 4\text{ m}$ ，A 點及 C 點為鉸支承，C 點為鉸接，角度 $\theta = 45^\circ$ ，載重 $P = 10\text{ kN}$ 、 $F = 10\text{ kN}$ 。分別求 A、C 點鉸支承反力的水平與垂直分量，及桿件在 E 點的彎矩、剪力與軸力。(25 分)



• 108 年三等特考試題 •

問題剖析

曲形剛架一樣由鉸接拆開增加力平衡式，要注意鉸支承有水平反力。曲桿的切面要沿著半徑方向截取，另注意目標斷面恰有集中力，故要分成 E 點大於 45 度側與小於 45 度側分別討論才完整。

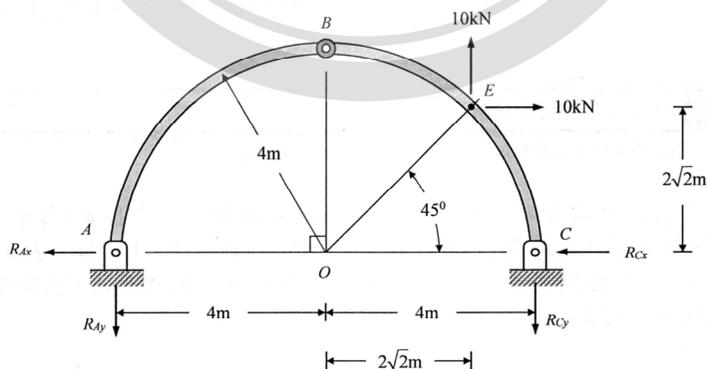
參考解答

1. 先算支承反力

因為兩邊鉸支承的高程相同，可以先算出垂直向的反力。如圖(a)整體分離體先預設好反力方向再對 A 點取力矩， $[+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0]: (10)(4 + 2\sqrt{2}) - (10)(2\sqrt{2}) - (R_{Cy})(8) = 0$ 。

$$\Leftrightarrow R_{Cy} = 5\text{ kN } (\downarrow)$$

$$[+\downarrow \Sigma F_y = 0]: R_{Ay} + R_{Cy} - 10 = 0 \Leftrightarrow R_{Ay} = 5\text{ kN } (\downarrow)$$



圖(a)

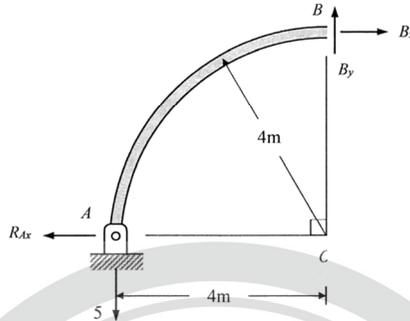
有鉸接切鉸接。直接由 B 鉸接點切開，鉸接會有兩個作用力，方向可由解題者自行設定，切記內力必大小相同方向相反，畫出圖(b)AB 分離體，對 B 點取力矩。

$[+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0]: (R_{Ax})(4) - (5)(4) = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 5 \text{ kN} (\leftarrow)$ ◀

$[+\rightarrow \Sigma F_x = 0]: B_x - R_{Ax} = 0 \Rightarrow B_x = 5 \text{ kN} (\text{同假設方向})$

$[+\downarrow \Sigma F_y = 0]: 5 - B_y = 0 \Rightarrow B_y = 5 \text{ kN} (\text{同假設方向})$

回到圖(a)整體分離體， $[+\leftarrow \Sigma F_x = 0]: R_{Cx} + R_{Ax} - 10 = 0 \Rightarrow R_{Cx} = 5 \text{ kN} (\leftarrow)$ ◀



圖(b)

2. 求 E 點軸力、剪力與彎矩

(1) E 點大於 45 度側

曲桿的切面要沿著半徑方向截取，先把 E 點外力合成垂直斜面與平行斜面方向。因 E 點有集中外力，要分成大於 45 度側與小於 45 度側分別討論。先取圖(c)大於 45 度側之 CE 分離體，注意 $10\sqrt{2}$ kN 會作用於 E 點上。對 E 點取力矩

$M_E = (5)(2\sqrt{2}) + (5)(4 - 2\sqrt{2}) = 20 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (同圖示方向，內側受壓) ◀

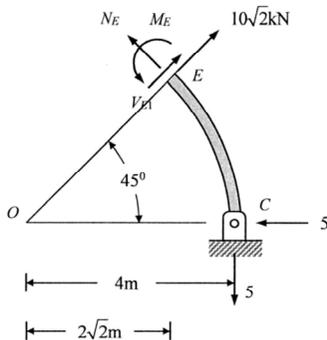
將 C 點支承反力分解至 45 度方向上， $N_E = (5)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (5)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ ◀

$V_{E1} = (5)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (5)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 10\sqrt{2} = -5\sqrt{2}$ (反圖示方向，逆時針) ◀

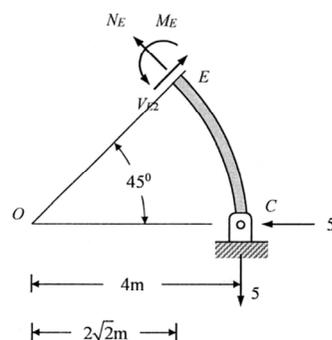
(2) E 點小於 45 度側

取圖(d)小於 45 度側之 CE 分離體， M_E 、 N_E 與上述相同但 V_E 不同。

$V_{E2} = (5)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (5)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5\sqrt{2}$ (同圖示方向，順時針) ◀



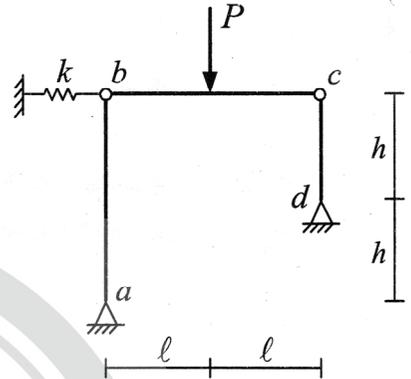
圖(c)



圖(d)

※本題請參考“實力《靜力學必做 50 題型》【P3-119】、
《靜力學試題精選》【P3-140】”

二、如圖所示構架，桿 AB、桿 BC 及桿 CD 為剛性桿件，A 點及 D 點為鉸支承，B 點及 C 點為鉸接，彈簧係數 $k = 125 \text{ kN/m}$ ，長度 $L = 2 \text{ m}$ 、 $h = 3 \text{ m}$ 。求臨界挫屈負載 P_{cr} 。(25 分)



• 108 年三等特考試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 材料性質：AB、BC、CD 為剛性桿件
- 幾何性質： $L = 2 \text{ m}$ ， $h = 3 \text{ m}$
- 彈簧常數： $k = 125 \text{ kN/m}$

(2) 待求

- 臨界荷重： P_{cr}

(3) 思路

- (外力) \rightarrow (反力、內力)

Key

單自由系統，考慮擾動狀態建立力平衡即可解決。

參考解答

(1) (外力) \rightarrow (反力、內力)

- 依據力的平衡

考慮微小擾動狀態下 (圖 a)，

取各桿分離體圖，可得

$$BC[\sum M_C = 0]: B_y = P/2$$

$$BC[\sum M_B = 0]: C_y = P/2$$

$$AB[\sum M_A = 0]: B_x(2h) - B_y(\Delta) = 0$$

$$\Leftrightarrow B_x = \frac{P\Delta}{4h}$$

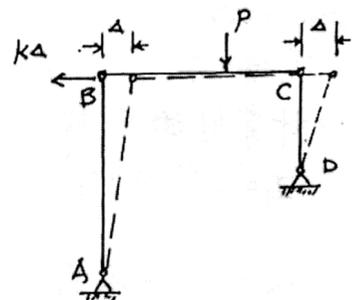


圖 a 擾動狀態

$$CD[\Sigma M_D = 0]: C_x(h) - C_y(\Delta) = 0$$

$$\Rightarrow C_x = \frac{P\Delta}{2h}$$

$$BC[\Sigma F_x = 0]: B_x + C_x = k\Delta$$

或

$$\frac{P\Delta}{4h} + \frac{P\Delta}{2h} = k\Delta$$

$$\left(\frac{3P}{4h} - k\right)\Delta = 0$$

$$\Rightarrow P = \frac{4kh}{3} = \frac{4}{3}(125)(3) = 500 \text{ kN}$$

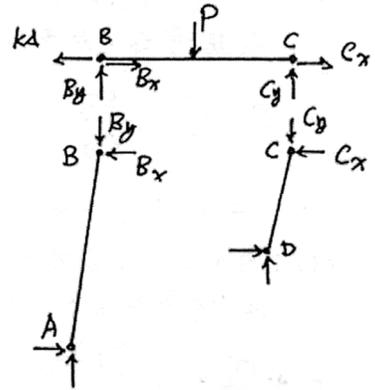
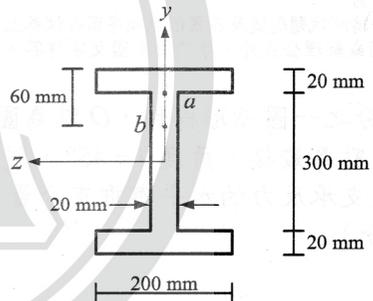


圖 b 分離體圖

Ans : $P_{cr} = 500 \text{ kN}$

※本題請參考“實力材料力學《試題精選》【P9-53】”

三、如圖所示工型斷面之直樑，材料之彈性模數 $E = 240 \text{ GPa}$ 。當工型斷面承受 $M_z = 24 \text{ kN-m}$ 彎矩及 $V_y = 12.5 \text{ kN}$ 剪力作用，求此時樑中性軸曲率半徑、a 點正向應力 σ_x 及 b 點剪應力 τ_{xy} 。(25 分)



• 108 年三等特考試題 •

問題剖析

(1)已知

- 材料性質： $E = 240 \text{ GPa}$
- 幾何性質： $b = 200 \text{ mm}$ ， $h = 340 \text{ mm}$ ， $t = 20 \text{ mm}$
- 內力： $M_z = 24 \text{ kN-m}$ ， $V_y = 12.5 \text{ kN}$

(2)待求

- 曲率半徑： ρ
- 應力： $\sigma_{x,a}$ ， $\tau_{xy,b}$

(3)思路

- (內力) \rightarrow (曲率) \rightarrow (曲率半徑)
- (內力) \rightarrow (應力)

109 年技師高考【精修班】

台北班 109/1/1(三)18:30 靜力

台中班 108/12/6(五)18:30 結構

高雄班 108/12/7(六)18:00 土力

其他課程陸續開課

~歡迎免費試聽~

參考解答

(1) 準備工作

- 計算剖面參數

$$I_z = \frac{(200)(340)^3 - (180)(300)^3}{12} = 250.07 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$Q_b = A_1 y_1 + A_2 y_2 = (200 \times 20)(160) + (20 \times 40)(130) \\ = 744 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

(2) (內力) → (曲率) → (曲率半徑)

- 依據彎矩-曲率關係式

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{EI_z}{M_z} = \frac{(240)(250.07 \times 10^6)}{(24 \times 10^3)} \\ = 2501 \times 10^3 \text{ mm} = 2501 \text{ m}$$

(3) (內力) → (應力)

- 依據彎曲公式

$$\sigma_{x,a} = \frac{M_z y_a}{I_z} = \frac{(24 \times 10^6)(150)}{(250.07 \times 10^6)} = 14.40 \text{ MPa}$$

- 依據剪切公式

$$\tau_{xy,b} = \frac{V_y Q_b}{I_z t} = \frac{(12.5 \times 10^3)(744 \times 10^3)}{(250.07 \times 10^6)(20)} = 1.859 \text{ MPa}$$

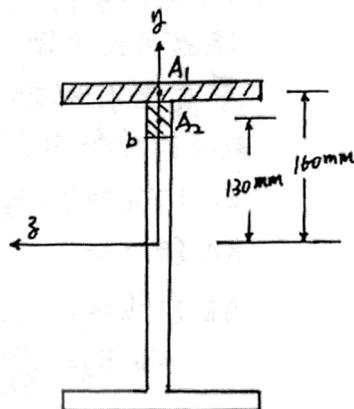


圖 a 剖面圖

Ans : $\rho = 2501 \text{ m}$

$\sigma_{x,a} = 14.40 \text{ MPa}$ (壓)

$\tau_{xy,b} = 1.859 \text{ MPa}$ (逆時針)

※本題請參考“實力材料力學《系統剖析》上冊【P4-46】”

【歡慶實力 29 週年慶】

2018-2019 扭轉人生•自己作主

報名滿額轉扭蛋，萬元現金等您拿

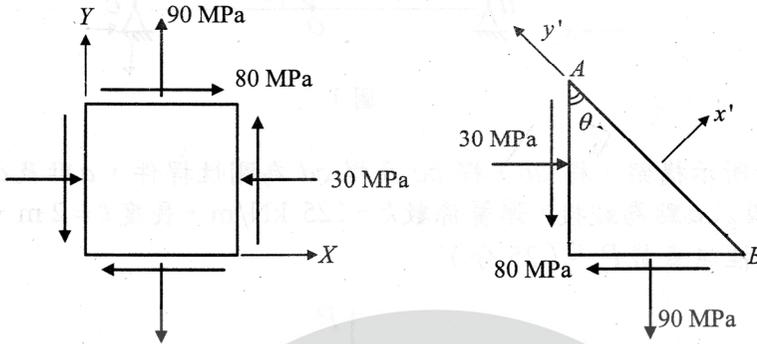
欲準備考試的您~絕對不能錯過啦

身為扭蛋控的您~讓您扭到失心瘋

真的省 hen 大唷~

活動網址：<https://reurl.cc/xDNyKe>

四、某點平面應力狀態如圖所示，求其主應力、最大剪應力，及當 $\theta = 60^\circ$ 作用在 AB 斜面的應力分量 $\sigma_{x'}$ 與 $\tau_{x'y'}$ 。(25 分)



• 108 年三等特考試題 •

問題剖析

Key

公式符號：拉逆為正。在套用公式時，務必要注意公式的正負規定。

(1) 已知

- xy 面應力： $\sigma_x = -30 \text{ MPa}$ ， $\sigma_y = 90 \text{ MPa}$ ， $\tau_{xy} = 80 \text{ MPa}$

(2) 待求

- 主應力： σ_{P_1} ， σ_{P_2}
- 最大剪應力： τ_{\max}
- 斜面應力： $\sigma_{x'}$ ， $\tau_{x'y'}$

(3) 思路

- (xy 面應力) \rightarrow (主應力、最大剪應力)
- \rightarrow (斜面應力)

參考解答

(1) 準備工作

- 計算相關參數

$$A = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{(-30) + (90)}{2} = 30 \text{ MPa}$$

$$B = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{(-30) - (90)}{2} = -60 \text{ MPa}$$

$$C = \tau_{xy} = 80 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{B^2 + C^2} = 100 \text{ MPa}$$

$$\cos 2\theta = \cos(2 \times 60^\circ) = -\frac{1}{2}$$

實力 LINE@官方帳號上線囉！

加入好友讓您掌握最新消息，有考試相關問題也可直接線上詢問唷。

台北實力 LINE ID：@895bwiki

中壢實力 LINE ID：@874uikbe

台中實力 LINE ID：@773qztgt

台南實力 LINE ID：@896wiefg

高雄實力 LINE ID：@306bigta

$$\sin 2\theta = \sin(2 \times 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) (xy 面應力) → (主應力、最大剪應力)

- 依據主應力公式

$$\sigma_{P_1} = A + R = 30 + 100 = 130 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

$$\sigma_{P_2} = A - R = 30 - 100 = -70 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

- 依據最大剪應力公式

$$\tau_{\max} = R = 100 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

(3) (xy 面應力) → (斜面應力)

- 依據平面應力轉換公式

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= A + B \cos 2\theta + C \sin 2\theta \\ &= 30 + (-60) \left(-\frac{1}{2} \right) + (80) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 129.3 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= -B \sin 2\theta + C \cos 2\theta \\ &= -(-60) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + (80) \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= 11.96 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Ans : $\sigma_{P_1} = 130 \text{ MPa}$ (拉), $\sigma_{P_2} = -70 \text{ MPa}$ (壓),
 $\tau_{\max} = 100 \text{ MPa}$
 $\sigma_{x'} = 129.3 \text{ MPa}$ (拉), $\tau_{x'y'} = 11.96 \text{ MPa}$ (逆)

※本題請參考“實力材料力學《系統剖析》下冊【P6-17&P6-27】”

【早鳥的你現在該做什麼】

Q1 : 如何才能提升考試成績？

A1 : 提升作答表達能力、作答邏輯清晰、申論觀點明確。

Q2 : 平時準備現在要先注意什麼？

A2 : 制定讀書計畫、寫筆記技巧、增強作答技巧。

Q3 : 該從何下手呢？

A3 : 先從【進入實力】開始，我們會引導你在不同階段，做好該做的事情。

早鳥開講 Part 2

主題：如何提高國考準備效率？

主講：周老師

時間：12/21 (六) 13:30

對象：實力學員可免費參加

欲參加者~請至【各分班】粉絲專頁線上報名填單

報名：[台北學員表單]：<http://bit.ly/2OPvCsF>

【早鳥早報到·先聽先知道】早鳥開課囉！

