106 年地方政府公務人員三等考試靜力學與材料力學參考解答

一、大部分的金屬材料其波松比（**Poisson's ratio**）ν 介於 **0.25~0.35** 之間，且受壓力作用，體積會減小。反之，受拉力作用則體積會變大。今有一線彈性材料，在雙軸應力（**biaxial stress**）σ_x 及 σ_y（同為拉應力或壓應力）作用下，亦滿足上述體積變化行為。若其彈性模數為 E，波松比為 ν，試以材料體積變化率，推導證明此材料波松比 ν 的上限值是 **0.5**（即 $\nu < 0.5$）。**(25 分)**

• 106 年三等特考試題 •

問題剖析

Key
體積變化率就是體積應變，其代表單位體積的變化量，若為正代表體積增大，若為負代表體積縮小。

(1)已知

- 材料性質：E，ν
- 應　　力：σ_x，σ_y（同為拉或壓）

(2)待求

- 體積變化率（或稱體積應變）
- 波 松 比：$\nu < 0.5$

(3)思路

- （應力）→（應變）→（體積應變）

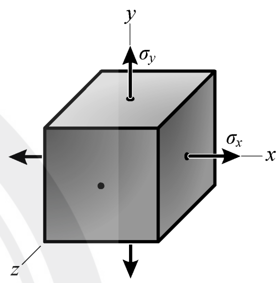


圖 a 雙軸應力

參考解答

(1)（應力）→（應變）

- 依據廣義虎克定律

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2)（應變）→（體積應變）

- 依據體積應變的定義

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)-1}{1\times1\times1}$$

$$= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z$$

若為小變形，則

$$\varepsilon_V \doteqdot \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

- 依據題意

受拉應力（$\sigma_x > 0$，$\sigma_y > 0$）時體積會增大（$\varepsilon_V > 0$），
受壓應力（$\sigma_x < 0$，$\sigma_y < 0$）時體積會縮小（$\varepsilon_V < 0$），
表示應力與體積應變同號。
所以 $1-2\nu > 0$
➪ $\nu < 0.5$

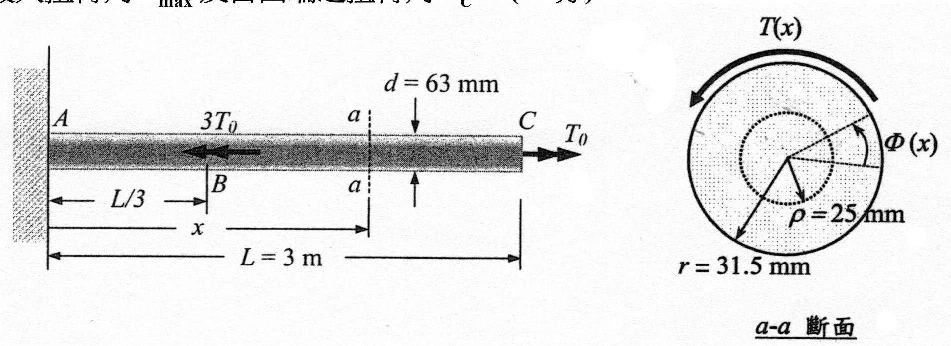
Ans：由體積變化率可得証
　　波松比 ν 的上限值為 0.5

※【資料來源】：本題請參考"實力材料力學《系統剖析》下冊〔P6-67〕"

二、圖示 AC 為一等截面圓形實心桿件，其長度為 $L = 3$ m，直徑 $d = 63$ mm，彈性模數 $E = 208$ GPa，波松比 $\nu = 0.3$。A 為固定端點，距 A 點 $L/3$ 處（B 點）及自由端（C 點）分別受 $3T_0$ 及 T_0 的扭矩作用。若在 BC 段 a-a 斷面上內徑 $\rho = 25$ mm 的剪應變 γ_ρ=250μ。試求：

(a)AC 桿件內最大的剪應力 τ_{max}、最大的正向應力 σ_{max} 及最大的正向應變 ε_{max}。(15 分)

(b)該桿件最大扭轉角 Φ_{max} 及自由端之扭轉角 Φ_C。(10 分)



• 106 年三等特考試題 •

問題剖析

> **Key**
> 這是一個基本的扭力構件問題，其中比較特別的是已知某一點的剪應變，此時必須先反推外力大小，當外力大小得到後，就變成一般的題目了。

(1)已知

- 材料性質：$E = 208$ GPa，$\nu = 0.3$
- 幾何性質：$L = 3$ m，$d = 63$ mm
- 應　　變：$\gamma_\rho = 250\mu$（$\rho = 25$ mm）

(2)待求

- 應　　力：τ_{max}，σ_{max}
- 應　　變：ε_{max}
- 變　　位：ϕ_{max}，ϕ_C

(3)思路

- （應變）→（應力）→（內力）→（外力）
- （最大內力）→（最大應力）→（最大應變）
- （內力）→（變形）→（變位）

參考解答

(1)準備工作

- 計算材料參數

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{208}{2(1+0.3)} = 80\,\text{GPa}$$

- 計算剖面參數

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(63)^4}{32} = 1.547\times10^6\,\text{mm}^4$$

(2)（應變）→（應力）

- 依據廣義虎克定律

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = (80\times10^3)(250\mu) = 20\,\text{MPa}$$

(3)（應力）→（內力）

- 依據扭轉剪應力公式

$$\tau_\rho = \frac{T_0\rho}{J}$$

或

$$T_0=\frac{\tau_\rho J}{\rho}=\frac{(20)(1.547\times10^6)}{(25)}=1.238\times10^6\text{ N-mm}$$

(4)（內力）→（外力）

- 依據力的平衡

$$T_{BC}=T_0=1.238\times10^6\text{ N-mm}$$

$$T_{AB}=-2T_0=-2(1.238\times10^6)=-2.476\times10^6\text{ N-mm}=T_{\max}$$

(5)（最大內力）→（最大應力）

- 依據扭轉最大剪應力公式

$$\tau_{\max}=\frac{16|T_{\max}|}{\pi d^3}=\frac{16(2.476\times10^6)}{\pi(63)^3}=50.4\text{ MPa}$$

- 依據平面的應力轉換（圖 a）

純剪應力元素旋轉 45°即為主應力元素，可得

$$\sigma_{\max}=\tau_{\max}=50.4\text{ MPa}$$

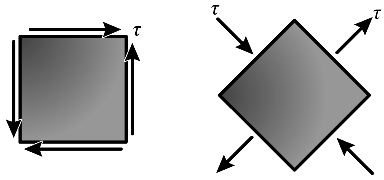


圖 a

> **Note**
> 扭力構件的垂直面上為純剪應力狀態，但考量應力轉換，在斜面上將會出現正交應力。

(6)（最大應力）→（最大應變）

- 依據廣義虎克定律

$$\varepsilon_{\max}=\frac{(50.4)}{E}-\frac{0.3(-50.4)}{E}=3.15\times10^{-4}$$

> **Note**
> 由應變莫爾圓，可得
> $$\varepsilon_{\max}=\frac{\gamma_{\max}}{2}=\frac{\tau_{\max}}{2G}$$

(7)（內力）→（變形）

- 依據扭轉角公式

$$\phi_{AB}=\frac{T_{AB}L_{AB}}{GJ}=\frac{(-2T_0)(L/3)}{GJ}=-\frac{2T_0L}{3GJ}$$

$$\phi_{BC}=\frac{T_{BC}L_{BC}}{GJ}=\frac{(T_0)(2L/3)}{GJ}=\frac{2T_0L}{3GJ}$$

(8)（變形）→（變位）

- 依據變位的諧合

$$\phi_B=\phi_A+\phi_{AB}=-\frac{2(1.238\times10^6)(3\times10^3)}{3(80\times10^3)(1.547\times10^6)}$$

$$=-2.00\times10^{-2}\text{ rad}=\phi_{\max}$$

$$\phi_C=\phi_{AB}+\phi_{BC}=-\frac{2T_0L}{3GJ}+\frac{2T_0L}{3GJ}=0$$

> **Check**
> $$\phi_B=\frac{\gamma L}{\rho}=\frac{(500\times10^{-6})(1000)}{(25)}$$
> $$=0.02\text{ rad}$$　　（OK.）

Ans：(a) $\tau_{\max}=\sigma_{\max}=50.4\text{ MPa}$

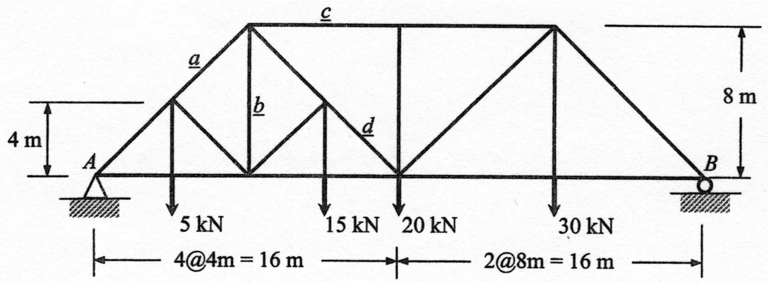
$\varepsilon_{\max}=3.15\times10^{-4}$

(b) $\phi_{\max}=-2.00\times10^{-2}\text{ rad}$（↞）

$\phi_C=0$

※【資料來源】：本題請參考“實力材料力學《系統剖析》上冊〔P3-21〕”

三、請以斷面法求出下示桁架 <u>*a*</u> 、 <u>*b*</u> 、 <u>*c*</u> 及 <u>*d*</u> 桿件之內力。**(25 分)**



• 106 年三等特考試題 •

問題剖析

1. 本桁架屬於簡單桁架，一次切開三根桿件的剖面法可算出 a、d、c 桿的軸力。
2. 在 a、d、c 桿的軸力求出後，再取出 J 點分離體以水平、垂直力平衡解 b 桿軸力

參考解答

1. 計算支承反力

桁架上無水平力，A 鉸支承無水平反力。參考圖(a)整體分離體，對 B 點取力矩。

$[+\circlearrowright \Sigma M_B = 0]: (R_A)(32)-(5)(28)-(15)(20)-(20)(16)-(30)(8)=0 \Rightarrow R_A = 31.25\,\text{kN}$（↑）。

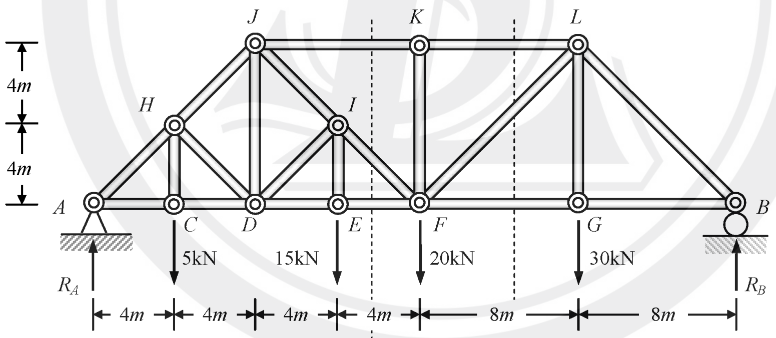
$[+\uparrow \Sigma F_y = 0]: R_A + R_B - 5 - 15 - 20 - 30 = 0 \Rightarrow R_B = 38.75\,\text{kN}$（↑）。

2. 計算桿件 *c* 軸力

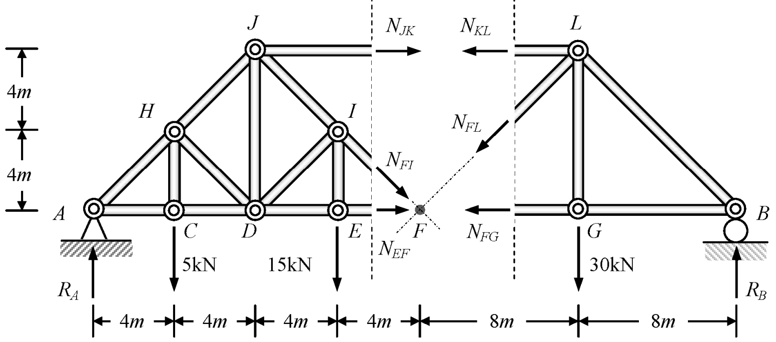
切開 KL、FL、FG 三根桿件得到圖(b)右側分離體，設軸力以拉力爲正，對 F 點取力矩

$\left[+\circlearrowright \Sigma M_F = 0\right]: (R_B)(16)+(N_{KL})(8)-(30)(8)=0 \Rightarrow N_{KL} = -47.5\,\text{kN}$（壓力）。

JK 桿軸力與 KL 桿相同，桿件 c 就是 JK 桿， $N_c = N_{JK} = N_{KL} = -47.5\,\text{kN}$(壓力)。 ◂



圖(a)



圖(b)

3. 計算桿件 *d* 軸力

切開 JK、FI、EF 三根桿件得到圖(b)左側分離體，設軸力以拉力爲正，由垂直力平衡

$[+\uparrow \Sigma F_y = 0]: R_A - 5 - 15 - (N_{FI})\left(1/\sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow N_{FI} = 15.91\,\text{kN}$（拉力）。

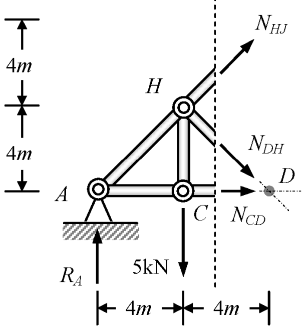
桿件 d 就是 FI 桿， $N_d = N_{FI} = 15.91\,\text{kN}$（拉力）。 ◂

4. 計算桿件 *a* 軸力

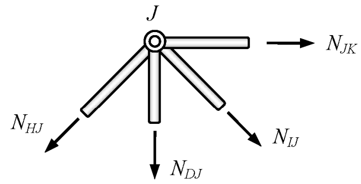
切開 *HJ*、*DH*、*CD* 三根桿件得到圖(c)分離體，設軸力以拉力為正，對 *D* 點取力矩

$[+\circlearrowright \Sigma M_D = 0]:(R_A)(8)-(5)(4)+\left(N_{HJ}/\sqrt{2}\right)(8)=0 \Rightarrow N_{HJ}=-40.659\text{ kN}$（壓力）。

桿件 *a* 就是 *HJ* 桿，$N_a = N_{HJ} = -40.659\text{ kN}$（壓力）。



圖(c)



圖(d)

5. 計算桿件 *b* 軸力

取出 *J* 結點分離體，$[+\rightarrow \Sigma F_x = 0]: N_{JK}+N_{IJ}/\sqrt{2}-N_{HJ}/\sqrt{2}=0$ 。

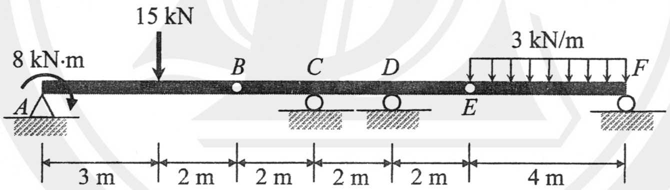
$\Rightarrow N_{IJ}=26.516\text{ kN}$(拉力)。

$[+\downarrow \Sigma F_y = 0]: N_{DJ}+N_{IJ}/\sqrt{2}+N_{HJ}/\sqrt{2}=0 \Rightarrow N_{DJ}=10\text{ kN}$（拉力）。

桿件 *b* 就是 *DJ* 桿，$N_b = N_{DJ} = 10\text{ kN}$（拉力）。

※【資料來源】：本題請參考“實力靜力學《試題精選》〔P3-76、P3-85〕”
“實力靜力學《必做 50 題型》〔P3-54〕”

四、下示 **AF** 梁，**B** 及 **E** 點為鉸接（**Hinge**）。請求出 **A**、**C**、**D** 及 **F** 點之反力，並繪出 **AF** 梁之剪力圖及彎矩圖（標示相關值或函數）。**(25 分)**



• 106 年三等特考試題 •

問題剖析

1. 具有內鉸接梁，有鉸接切鉸接。
2. 剪力為零處有局部彎矩極值不要漏掉。

參考解答

1. 切開鉸接點計算反力與內力

梁上無水平力，*A* 鉸支承無水平反力。有鉸接切鉸接，參考圖(a)切開鉸接點 *B* 取出 *AB* 段分離體。

$[+\circlearrowright \Sigma M_B = 0]:(R_A)(5)+8-(15)(2)=0 \Rightarrow R_A = 4.4\text{ kN}$（↑）。

$[+\uparrow \Sigma F_y = 0]: R_A + B_y - 15 = 0 \Rightarrow B_y = 10.6\text{ kN}$（同假設方向）。

參考圖(a)切開鉸接點 *E* 取出 *EF* 段分離體，均佈荷重合力 12kN 恰位於 *EF* 段中點，左右各分擔一半，故 $R_F = 6\text{ kN}$（↑）；$E_y = 6\text{ kN}$（同假設方向）。

參考圖(a)取出 *BE* 段分離體，先對 *D* 點取力矩。

$[+\circlearrowright \Sigma M_D = 0]:(R_C)(2)-(B_y)(4)+(E_y)(2)=0 \Rightarrow R_C = 15.2\text{ kN}$（↑）。

$[+\uparrow \Sigma F_y = 0]: R_C + R_D - B_y - E_y = 0 \Rightarrow R_D = 1.4\text{ kN}$（↑）。

2. 繪製剪力圖與彎矩圖

(1) 先針對關鍵點 A、G、C、D、H 點計算剪力與彎矩值。

①A 點

有集中力偶作用，$M_A = 8\,\text{kN-m}$（上壓正彎矩）。

②G 點

$M_G = 8 + (4.4)(3) = 21.2\,\text{kN-m}$（上壓正彎矩）。

③C 點

$M_C = 8 + (4.4)(7) - (15)(4) = -21.2\,\text{kN-m}$（下壓負彎矩）。

④D 點

$M_D = 8 + (4.4)(9) - (15)(6) + (15.2)(2) = -12\,\text{kN-m}$（下壓負彎矩）。

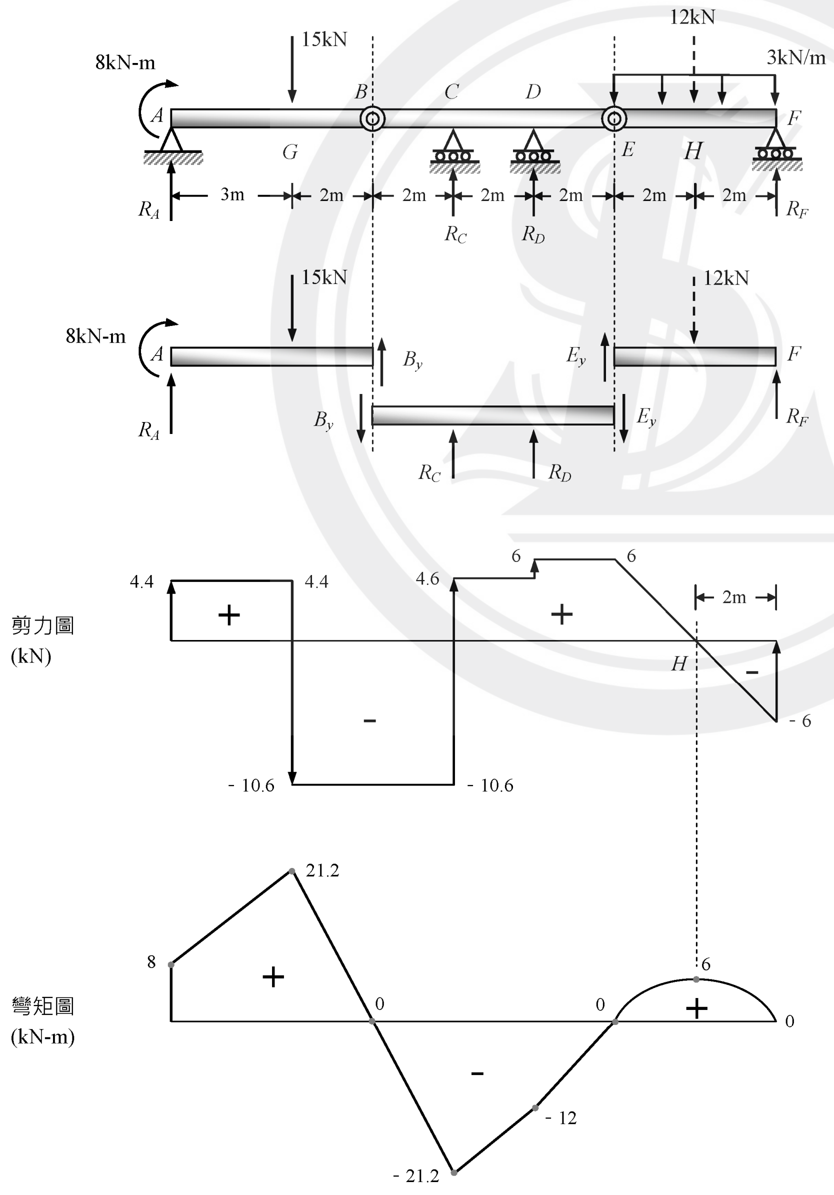
⑤H 點

EF 段有剪力為零點 H，有局部彎矩極值。

$M_H = (6)(2) - (3\times 2)(1) = 6\,\text{kN-m}$（上壓正彎矩）。

(2) 依剪力圖與彎矩圖繪製要點繪製圖形

繪製剪力圖與彎矩圖如圖(a)所示。



圖(a)

※【資料來源】：本題請參考“實力靜力學《試題精選》〔P3-38〕”

“實力靜力學《必做 50 題型》〔P3-31〕