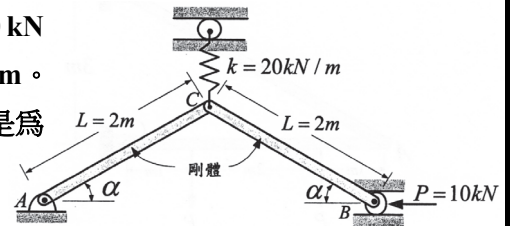


105 年地方政府公務人員三等考試靜力學與材料力學參考解答

本科由實力專任教師許弘老師及林冠丞老師即時解答

一、圖示之結構由長度 $L = 2\text{ m}$ 之剛性桿件 AC 及 BC 所組成，在 C 點連接一彈簧。在 $\alpha = 0^\circ$ 時，彈簧未伸長或縮短；當施加外力 $P = 10\text{ kN}$ 於 B 點時，結構之變形如圖所示。設彈簧之彈力常數為 $k = 20\text{ kN/m}$ 。以能量法 (Energy Method) 求平衡時之角度 α ，並判斷平衡時是為穩定平衡、不穩定平衡或隨遇平衡。(25 分)



【解題老師】許弘 老師

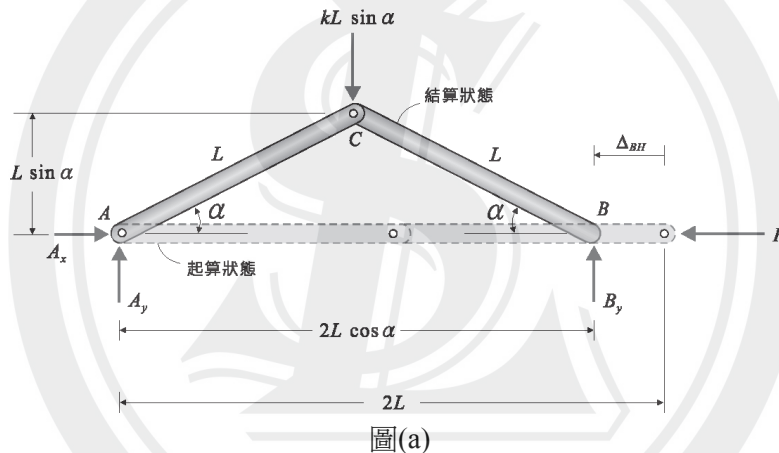
• 105 年三等特考試題 •

問題剖析

1. 題目指定用能量法分析，雖然虛功法與位能法都可以解析此題，但最小位能原理可以進一步分析穩定性。
2. 最小位能原理要先計算位能，對位能一次微分得平衡角度，對位能兩次微分可判斷穩定性。

參考解答

1. 計算結構位能



圖(a)

結構位能應包含「重力」位能 V_g 、「彈力」位能 V_e (即彈簧應變能)、「外力」位能 V_p 。

(1) 彈簧應變能

$$\text{彈簧應變能 } V_e = \frac{1}{2} k \delta^2 = \left(\frac{1}{2} \right) (\text{彈簧常數}) (\text{彈簧伸縮量})^2。$$

位能「起」算狀態亦即位能基準位置，我們通常取彈簧不伸縮的位置，故我們設定圖(a)下方的 $\alpha = 0^\circ$ 剛體位置為位能「起」算狀態，圖(a)上方的 $\alpha =$ 任意值的剛體位置為位能「結」算狀態。

在 $\alpha = 0^\circ$ 剛體位置為位能「起」算狀態，彈簧未伸縮 $\delta_1 = 0$ 。 $V_{e1} = \frac{1}{2} k \delta_1^2 = 0$ 。

在 $\alpha =$ 任意值的剛體位置為位能「結」算狀態，依幾何關係彈簧已縮短 $\delta_2 = L \sin \alpha$ 。 $V_{e2} = \frac{1}{2} k \delta_2^2 = \frac{k}{2} (L \sin \alpha)^2$ 。

起終狀態的彈簧應變能差

$$\Delta V_e = V_{e2} - V_{e1} = \frac{k}{2} (L \sin \alpha)^2 - 0 = \frac{k}{2} (L \sin \alpha)^2$$

(2) 重力位能

因為桿件不考慮自重，不論是位能起結算狀態重力位能均為零， $V_{g1} = V_{g2} = 0$ 。

(3) 外力位能

外力位能差為外力做功加負號，亦即外力位能差 $\Delta V_p = -$ (力) (該力方向上的位移)。其中位移係指位能起結算狀態的力量作用點上位置差值。由圖(a)我們可以看出位能起結算狀態之 B 點水平位移為

$$\Delta_{BH} = 2L - 2L \cos \alpha = 2L(1 - \cos \alpha) \quad (\leftarrow)。$$

注意 P 力向左與 Δ_{BH} 同向作正功，但外力位能差為外力做功加負號。

$$\Delta V_p = -(P)[2L(1 - \cos \alpha)] = -2PL(1 - \cos \alpha)。$$

(4) 總位能

故由位能「起」算狀態至「結」算狀態的系統總位能差為

$$\Delta V = \Delta V_e + \Delta V_g + \Delta V_p = \frac{k}{2}(L \sin \alpha)^2 - (P)[2L(1 - \cos \alpha)]。$$

2. 對位能微分計算平衡角度與穩定性判斷

(1) 對位能一次微分計算平衡角度

依位能極值原理，當系統滿足力平衡時，系統位能處於極值狀態，其一次微分為零。

$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}(\Delta V) = k(L \sin \alpha)(L \cos \alpha) - 2PL \sin \alpha = 0。$$

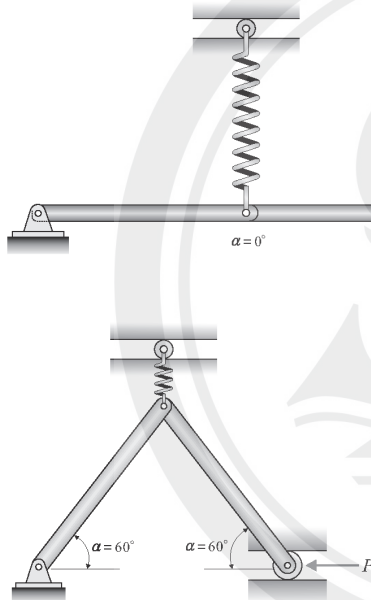
$$\Rightarrow (kL \cos \alpha - 2P)(L \sin \alpha) = 0。 \quad \dots(a)$$

(a)式有兩種可能性， $L \sin \alpha = 0$ 或 $kL \cos \alpha - 2P = 0$ 。

$$L \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0^\circ。$$

$$kL \cos \alpha - 2P = 0 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2P}{kL}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2 \times 10}{20 \times 2}\right) = 60^\circ。$$

故本題有「二」個平衡角度，分別是 $\alpha = 0^\circ$ 與 $\alpha = 60^\circ$ ，如圖(b)所示。



圖(b)

(2) 對位能二次微分判斷穩定性

依最小位能原理判斷平衡角度的穩定性，當系統處於平衡位置時，可由位能函數的「二」次微分大於、小於或等於零判斷平衡角度的穩定性。

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} = \frac{d}{d\alpha}[(kL \cos \alpha - 2P)(L \sin \alpha)] = kL^2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - 2PL \cos \alpha。 \quad \dots(b)$$

讓我們代入兩個平衡角度，分別檢核其穩定性。

$$\left. \frac{d^2V}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0^\circ} = kL^2(\cos^2 0^\circ - \sin^2 0^\circ) - 2PL \cos 0^\circ = (20)(2)^2 - 2(10)(2) = 40 \text{ kN}\cdot\text{m} > 0。$$

因為 $\left. \frac{d^2V}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0^\circ} > 0$ ，所以平衡角度 $\alpha = 0^\circ$ 為「穩定」平衡。

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2V}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=60^\circ} &= kL^2(\cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ) - 2PL \cos 60^\circ \\ &= (20)(2)^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) - (2)(10)(2) \left(\frac{1}{2}\right) = -60 \text{ kN}\cdot\text{m} < 0 \end{aligned}$$

105 年三四等特考
部分科目解答
請上實力網站參閱
<http://www.shi-li.com.tw/>

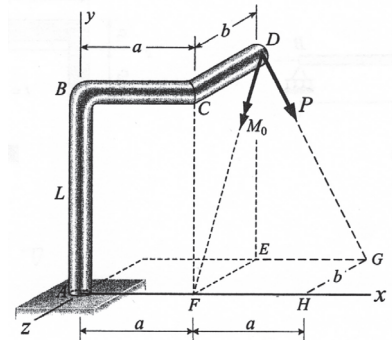


因爲 $\left. \frac{d^2V}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=60^\circ} < 0$ ，所以平衡角度 $\alpha = 60^\circ$ 爲「不穩定」平衡。

本題有二個平衡角度，分別是 $\alpha = 0^\circ$ 與 $\alpha = 60^\circ$ ， $\alpha = 0^\circ$ 爲穩定平衡； $\alpha = 60^\circ$ 爲不穩定平衡。

※【資料來源】：本題請參考“實力材料力學《系統題庫》〔P2-6〕”

二、托架 ABCD 是由垂直桿 AB ($L = 2\text{ m}$)、平衡於 x 軸之 BC 桿 ($a = 1.2\text{ m}$) 及平行於 z 軸之 CD 桿 ($b = 0.8\text{ m}$) 所組成，如圖所示。外力 $P = 15\text{ kN}$ 作用於 D 點指向 G 點；力矩 $M_0 = 2\text{ kN}\cdot\text{m}$ 作用於 D 點指向 F 點。求在 A 點截面上的軸力大小、剪力大小、彎矩大小及扭矩大小。(25 分)



【解題老師】許弘 老師

• 105 年三等特考試題 •

問題剖析

空間構架固定端反力計算，先假設支承反力方向，本題屬於較簡單的空間力系可以使用純量分析。先將 P 力與力偶 M_0 分解， P 力對固定端 A 點取力矩，力偶本身就是力矩形式直接相加減，使用六個方程式即可求出固端反力。

參考解答

1. 先分解 P 力與力偶 M_0

(1) 分解 P 力

P 力起點 D 點座標 $(1.2, 2, -0.8)$ ；終點 G 點座標 $(2.4, 0, -0.8)$ 。分解比例皆取絕對值，DG 線 x 向距離 $\Delta x = 2.4 - 1.2 = 1.2\text{ m}$ ； y 向距離 $\Delta y = |0 - 2| = 2\text{ m}$ ； z 向距離 $\Delta z = -0.8 - (-0.8) = 0\text{ m}$ 。DG 線長度

$$\sqrt{1.2^2 + 2^2 + 0^2} = 2.332\text{ m}。故 DG 線 x 向比例 $1.2/2.332 = 0.515$ ； y 向比例 $2/2.332 = 0.858$ 。$$

P 力的 x 向分量 $P_x = (0.515)(15) = 7.725\text{ kN}$ (朝正 x 向)。

P 力的 y 向分量 $P_y = (0.858)(15) = 12.87\text{ kN}$ (朝負 y 向)。

P 力的 z 向分量 $P_z = 0$ 。

(2) 分解力偶 M_0

力偶 M_0 起點 D 點座標 $(1.2, 2, -0.8)$ ；終點 F 點座標 $(1.2, 0, 0)$ 。分解比例皆取絕對值，DF 線 x 向距離 $\Delta x = 1.2 - 1.2 = 0\text{ m}$ ； y 向距離 $\Delta y = |0 - 2| = 2\text{ m}$ ； z 向距離 $\Delta z = 0 - (-0.8) = 0.8\text{ m}$ 。DF 線長度

$$\sqrt{0^2 + 2^2 + 0.8^2} = 2.154\text{ m}。故 DF 線 y 向比例 $2/2.154 = 0.929$ ； z 向比例 $0.8/2.154 = 0.371$ 。$$

M_0 的 x 向分量 $M_{0x} = 0$ 。

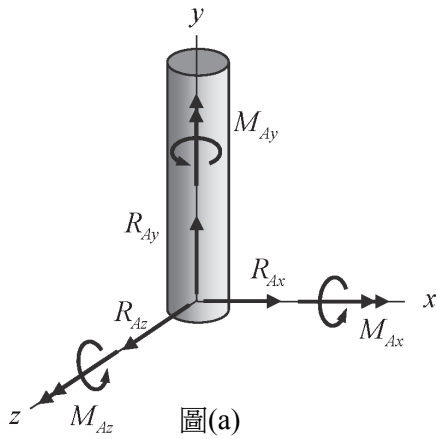
M_0 的 y 向分量 $M_{0y} = (0.929)(2) = 1.858\text{ kN}$ (朝負 y 向)。

M_0 的 z 向分量 $M_{0z} = (0.371)(2) = 0.742\text{ kN}$ (朝正 z 向)。

2. 計算固定端反力

(1) 設定固端反力方向

設定固端反力方向如圖(a)所示。固端反力與 A 斷面內力的關係爲 R_{Ax} 爲 x 向剪力； R_{Az} 爲 z 向剪力。 R_{Ay} 爲軸力， M_{Ay} 爲扭矩。 M_{Ax} 爲 x 向彎矩； M_{Az} 爲 z 向彎矩。



106 年技師高考【精修班】
 台北班 1/2(一)18:30 靜力
 台中班 12/17(六)18:00 結構
 高雄班 12/17(六)18:00 土力
 其他課程陸續開課
 ~歡迎免費試聽~

(2) 力平衡式

力平衡相加減以座標正向為正。

$[\Sigma F_x = 0]: R_{Ax} + P_x = 0 \Rightarrow x$ 向剪力 $R_{Ax} = -7.725$ kN(負 x 向)。

$[\Sigma F_y = 0]: R_{Ay} - P_y = 0 \Rightarrow$ 軸力 $R_{Ay} = 12.87$ kN(正 y 向，軸壓力)。

$[\Sigma F_z = 0]: R_{Az} - P_z = 0 \Rightarrow z$ 向剪力 $R_{Az} = 0$ kN。

(3) 力矩平衡式

力矩平衡相加減也以座標正向為正，注意空間中的力對與其作用線平行的軸不生力矩。

$[\Sigma M_x = 0]: M_{Ax} - (P_y)(0.8) + M_{0x} = 0 \Rightarrow x$ 向彎矩 $M_{Ax} = 10.296$ kN-m(正 x 向)。

$[\Sigma M_y = 0]: M_{Ay} - (P_x)(0.8) - M_{0y} = 0 \Rightarrow$ 扭矩 $M_{Ay} = 8.038$ kN-m(正 y 向)。

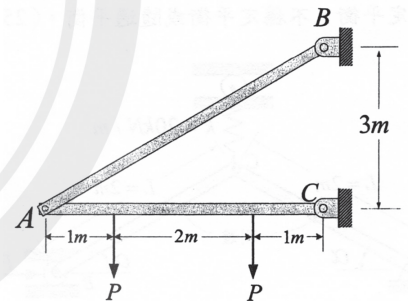
$[\Sigma M_z = 0]: M_{Az} - (P_x)(2) - (P_y)(1.2) + M_{0z} = 0 \Rightarrow z$ 向彎矩 $M_{Az} = 30.152$ kN-m(正 z 向)。

※【資料來源】：本題請參考“實力靜力學《精修班講義》〔P2-48 例 2.18〕”

三、圖中，桿件 AB 及 AC 為截面積 $A = 36 \text{ mm}^2$ 之等截面圓形桿件，其應力~應變關係為：

$$\sigma = \frac{104,000\varepsilon}{1 + 200\varepsilon} \text{ for } 0 \leq \varepsilon \leq 0.03 \quad (\sigma \text{ 的單位為 MPa})$$

若桿件 AB 及 AC 之允許拉應力或壓應力均為 0.2% 偏距降伏應力 (offset yield stress)，求允許載重 P_{allow} 。(25 分)



【解題老師】林冠丞 老師

• 105 年三等特考試題 •

問題剖析

(1) 已知

• 材料性質： $\sigma = \frac{104,000\varepsilon}{1 + 200\varepsilon}$ MPa

σ_{allow} 為 0.2% 偏距降伏應力

• 幾何性質： $A = 36 \text{ mm}^2$

(2) 待求

• 容許荷重： P_{allow}

(3) 思路

• (外力) \rightarrow (內力) \rightarrow (應力) \rightarrow (容許應力)

Key

偏距降伏應力是指平行初始切線的偏移線與應力-應變曲線的交點應力。

參考解答

(1) 準備工作

- 計算剖面參數

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 36$$

$$\Rightarrow d = 6.77 \text{ mm}$$

$$S = \frac{\pi d^3}{32} = 30.46 \text{ mm}^3$$

(2) (外力) → (內力)

- 依據力的平衡 (圖 a)

$$\textcircled{1} [\sum M_C = 0] : B_x = \frac{4}{3}P \quad (\rightarrow)$$

$$\textcircled{2} [\sum F_x = 0] : C_x = B_x = \frac{4}{3}P \quad (\leftarrow)$$

$$N_{AC} = C_x = \frac{4}{3}P \quad (\text{壓})$$

- ③ AB 為二力物體

$$\Rightarrow B_y = \frac{3}{4}B_x = P \quad (\uparrow)$$

$$N_{AB} = \frac{5}{4}B_x = \frac{5}{3}P \quad (\text{拉})$$

$$\textcircled{4} [\sum F_y = 0] : C_y = P \quad (\uparrow)$$

$$\textcircled{5} M_{AC, \max} = P(1000) = 1000P \text{ N-mm}$$

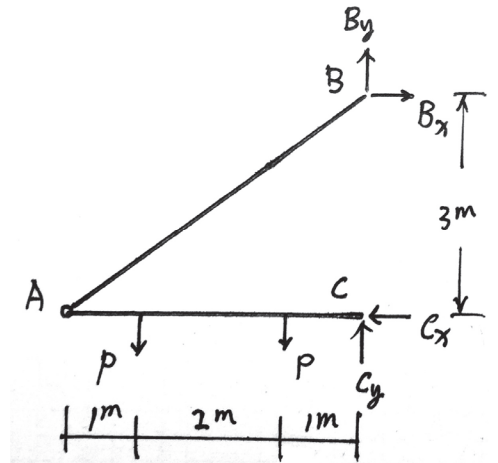


圖 a

(3) (內力) → (應力)

- 依據軸向應力及彎曲應力公式

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A} = \frac{5P/3}{36} = 0.0463P$$

$$\sigma_{AC, \max} = \frac{N_{AC}}{A} + \frac{M_{AC, \max}}{S} = \frac{4P/3}{36} + \frac{1000P}{30.46} = 32.87P$$

$$\sigma_{\max} = \max(0.0463P, 32.87P) = 32.87P$$

(4) (應力) → (容許應力)

- 依據應力-應變關係

$$\sigma = \frac{104,000\varepsilon}{1+200\varepsilon}$$

$$\sigma' = \frac{104,000(1+200\varepsilon) - 200(104,000\varepsilon)}{(1+200\varepsilon)^2} = \frac{104,000}{(1+200\varepsilon)^2}$$

初始斜率為 $\sigma'_0 = 104,000$

- 依據偏距法

$$\text{令 } \frac{104,000\varepsilon}{1+200\varepsilon} = 104,000(\varepsilon - 0.002)$$

$$\Rightarrow 20.8 \times 10^6 \varepsilon^2 - 41,600\varepsilon - 208 = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon = 4.317 \times 10^{-3}$$

$$\therefore \sigma_{\text{allow}} = \frac{104,000(4.317 \times 10^{-3})}{1+200(4.317 \times 10^{-3})} = 240.9 \text{ MPa}$$

$$\text{令 } \sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{allow}}$$

或

$$32.87P \leq 240.9$$

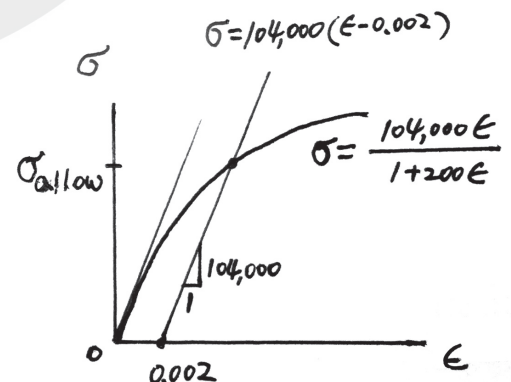


圖 b

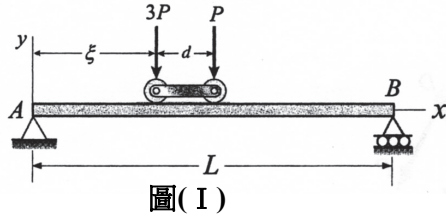
$$\Rightarrow P \leq 7.33 \text{ N} = P_{\text{allow}}$$



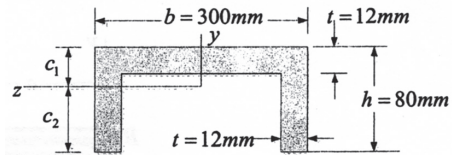
Ans : $P_{\text{allow}} = 7.33 \text{ N}$

※【資料來源】：本題請參考“實力材料力學《試題精選》〔A1-5〕”

四、圖(I)之簡支梁 AB，承受相連兩輪之載重，此載重可移到任何位置（即圖(I)中的 ξ 為任意值）。梁 AB 之截面如圖(II)所示。設 $P = 2 \text{ kN}$ ， $L = 10 \text{ m}$ ， $d = 1.5 \text{ m}$ 。求此移動載重造成梁內之最大拉應力，及其所在位置。(25 分)



圖(I)



圖(II)

【解題老師】林冠丞 老師

• 105 年三等特考試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 幾何性質： $L = 10 \text{ m}$ ， $d = 1.5 \text{ m}$
- 外力： $P = 2 \text{ kN}$

(2) 待求

- 應力： $+\sigma_{\text{max}}$ 及其位置

(3) 思路

- (外力) \rightarrow (內力) \rightarrow (最大內力) \rightarrow (最大應力)

參考解答

(1) 準備工作

- 計算剖面參數

$$c_2 = \frac{(300 \times 80)(40) - (276 \times 68)(34)}{(300 \times 80) - (276 \times 68)} = 61.52 \text{ mm}$$

$$c_1 = 80 - 61.52 = 18.48 \text{ mm}$$

$$I = \frac{1}{3} \left[(300)(18.48)^3 - (276)(6.48)^3 + (24)(61.52)^3 \right] = 2,468,800 \text{ mm}^4$$

(2) (外力) \rightarrow (內力)

- 依據力的平衡 (圖 a)

$$[\Sigma M_B = 0] : R_A(10) - 6(10 - \xi) - 2(8.5 - \xi) = 0$$

$$\Rightarrow R_A = -0.8\xi + 7.7$$

3P 輪下 (C 點) 所對應之彎矩為

$$M_C = R_A(\xi) = -0.8\xi^2 + 7.7\xi$$

(3) (內力) \rightarrow (最大內力)

- 依據極值定理

$$\text{令 } \frac{dM_C}{d\xi} = 0$$

Key

當僅有兩輪作用時，最大彎矩會產生在較大輪重底下。

Note

結論：當合力與 3P 剛好平分梁中線時，在 3P 底下會有最大彎矩。此一結論在結構學中可以直接套用，但對於基本材力問題，則建議重新推導。

或

$$-1.6\xi + 7.7 = 0$$

$$\Rightarrow \xi = 4.813 \text{ m}$$

$$M_{\max} = M_{\xi=4.813} = 18.53 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

(4) (最大內力) → (最大應力)

• 依據彎曲應力公式

$$+\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} c_2}{I} = \frac{(18.53 \times 10^6)(61.52)}{2,468,800} = 462 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

Note

∴ 正彎矩

∴ 最大拉應力會在梁下緣

Ans : $+\sigma_{\max} = 462 \text{ MPa}$ 產生在
 $\xi = 4.813 \text{ m}$ 之最下緣

※【資料來源】：本題請參考“實力材料力學《系統剖析》〔例 A3.3-9〕” 及
 “實力材料力學《試題精選》〔D1-7〕”

