105 年地方政府公務人員三等考試平面測量與施工測量參考解答

本科由實力專任教師**張陳程老師**即時解答

一、今以同一台全站儀（**Total Station**）觀測某一三角形之內角和，一共觀測 **9** 次，得內角和閉合差爲 **−1″**、**0″**、**2″**、**−4″**、**−1″**、**1″**、**−2″**、**3″** 及 **0″**，請計算此三角形內角和之中誤差，並推算該全站儀之測角中誤差。**(20 分)**

【解題老師】張陳程老師　　•105 年三等特考試題•

問題剖析

本題必須依據內角閉合差計算內角和之中誤差，再由內角和之中誤差推算測角中誤差。

參考解答

令σ_W表三角形內角和之中誤差

$$\sigma_W^2=\frac{(-1)^2+(0)^2+(2)^2+(-4)^2+(-1)^2+(1)^2+(-2)^2+(3)^2+(0)^2}{9}=4$$

$$\sigma_W=\pm 2''$$

設一個三角形之內角分別爲α、β、γ，若不考慮球面角超，則該三角形之內角和閉合差

$W=\alpha+\beta+\gamma-180^\circ$

若α、β、γ獨立不相關，依誤差傳播定律：

$$\sigma_W^2=\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2+\sigma_\gamma^2$$

設測角中誤差相等，即$\sigma_\alpha=\sigma_\beta=\sigma_\gamma=\sigma_0$，則$\sigma_W^2=3\sigma_0^2$

$$\sigma_0=\frac{\sigma_W}{\sqrt{3}}=\frac{\pm 2''}{\sqrt{3}}$$

Ans：三角形內角和之中誤差$\sigma_W=\pm 2''$

測角中誤差$\sigma_0=\dfrac{\pm 2''}{\sqrt{3}}$

※【資料來源】：本題請參考“實力測量學精修班教材〔第 2 章 P23、P35〕”

二、於臺灣西南沿岸小範圍區域內有三個已知正高（**Orthometric Height**）**H** 的水準點 **A**、**B**、**C**，及一個未知高程的水準點 **D**，今利用 **GNSS** 測得四個點的橢球高(**Ellipsoid Height**）**h**，並利用內政部公布 **103** 年臺灣地區大地起伏模型查得此四個點的大地起伏（**Geoidal Height**）N^{model}，相關數據如下表所示，單位爲公尺，請回答以下問題：(每小題 **10** 分，共 **20** 分)

點號	正高（H）	橢球高（h）	大地起伏（N^{model}）
A	**6.475**	**12.345**	**5.896**
B	**4.739**	**10.617**	**5.902**
C	**11.069**	**16.945**	**5.898**
D	未知	**10.525**	**5.901**

(一)請繪圖說明正高、橢球高與大地起伏之間的關係。

(二)在需考量內政部公布台灣地區大地起伏模型的情況之下，請問 **D** 點的正高爲何？

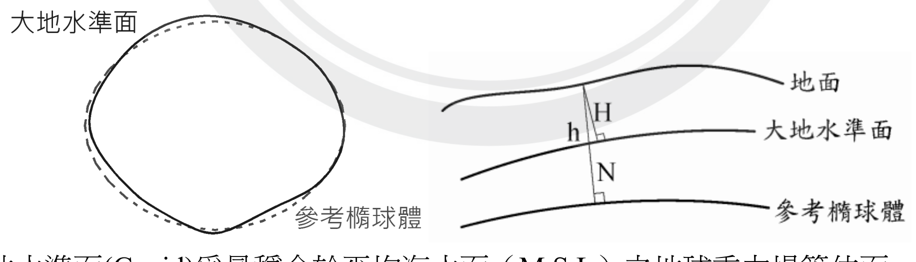
【解題老師】張陳程老師 •105 年三等特考試題•

問題剖析

本題必須先說明正高、橢球高與大地起伏之間的關係，再計算 D 點的正高。

參考解答

(一) 正高、橢球高與大地起伏之間的關係



大地水準面(Geoid)爲最穩合於平均海水面（M.S.L）之地球重力場等位面，故爲不規則曲面。大地水準面爲高程測量之基準，即爲正高之起算面。

大地水準面爲一接近橢球體之不規則幾何曲面。在測量作業中，一般採用參考橢球體作爲平面位置之基準。

正高（Ortho Height）H，又稱高程（Elevation），係地球上某一點沿鉛垂線（垂線）至水準基面（平均海水面，大地水準面）之垂直距離。傳統水準測量所得之高程，即是以大地水準面爲基準之正高。

幾何高（Geometric Height， Geodetic Height）h，又稱橢球高，係地球上某一點沿垂直線（法線）至參考橢球體面（Ellipsoid）之垂直距離。GPS 測量之結果為幾何高 h。亦即 GPS 觀測成果是由橢球面起算之幾何高 h，並不等於由大地水準面起算之正高。

圖中 N 為大地起伏，係大地水準面與參考橢球體之垂直距離。可藉重力測量等方法測定大地起伏 N 之資料。

H、h、N 三者關係如下：$N = h - H$，或高程 $H = h - N$，或高程差 $\Delta H = \Delta h - \Delta N$

(二) 計算 D 點的正高H_D

由橢球高(h)及大地起伏(N^{model})計算之正高 H'，與已知正高(H)比較，兩者間之偏移量(S)如下表，單位為公尺：

點號	正高(H)	橢球高(h)	大地起伏(N^{model})	正高 H'=h-N^{model}	偏移量 S=H-H'
A	6.475	12.345	5.896	6.449	0.026
B	4.739	10.617	5.902	4.715	0.024
C	11.069	16.945	5.898	11.047	0.022

偏移量之平均值 $S = \dfrac{0.026 + 0.024 + 0.022}{3} = 0.024(m)$

D 點的正高 $H_D = 10.525 - 5.901 + 0.024 = 4.648(m)$

※【資料來源】：本題請參考"實力測量學精修班教材〔第 1 章 P14〕"

三、衛星定位測量中，常利用差分地位（**Differential Positioning**）來提升定位精度；請列出各種可能的差分定位方式，並說明各種差分定位方式可以消除或減少那些誤差？**(20 分)**

【解題老師】張陳程老師　　•105 年三等特考試題•

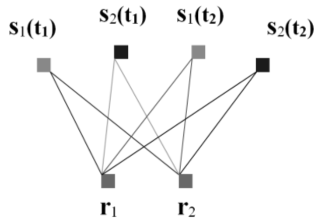
問題剖析

本題必須說明 GPS 觀測值之差分方式，並說明其可消除或減少之誤差。

參考解答

相對定位通常採用差分法，將接收器接收的觀測量相減，得到差分觀測值。差分之優點為可消除或減少部份誤差之影響，例如時鐘誤差與大氣折射誤差。GPS定位之目的是求解測站坐標，一般並不是必須求解時鐘誤差與大氣折射誤差，因此通常採用差分法

消除或減少此誤差之影響。差分之缺點爲(1)必須同時觀測，(2)差分後觀測量數量減少且相關。電碼（虛擬距離觀測）的差分定位結果爲公尺級精度，而載波相位觀測的差分定位結果爲公分級精度。差分法只能得到接收器間之相對基線差，屬於相對定位，必須已知至少一個控制點的坐標，才可得到絕對坐標。



以下說明一般採用 GPS 觀測值之差分(Differential)方式，並說明其可消除或減少之誤差：

(一) 一次差

1. 地面一次差

將不同測站之兩部接收器同時對同一顆衛星之觀測量相減（差分），由於該衛星之時鐘誤差對此二觀測量之影響可假設爲相同，因此差分結果可消除衛星時鐘誤差。由於衛星軌道誤差與大氣折射誤差對兩部接收器同時觀測之影響，有一定的相關性，若兩部接收器相距不遠（<20km），一次差亦將減少衛星軌道誤差與大氣折射誤差之影響。

設(X^j, Y^j, Z^j)爲衛星(j)發射訊號時之坐標(已知)，(X_i, Y_i, Z_i)爲接收器(i)接收訊號時之坐標(待求)，接收器(i)至衛星(j)之真實距離

$$D_i^j = \sqrt{\left(X^j - X_i\right)^2 + \left(Y^j - Y_i\right)^2 + \left(Z^j - Z_i\right)^2}$$

令 c 表光速，λ 表波長，N_i^j ：整數週波未定值，ϕ_i^j ：相位差，t_i 表接收器(i)之時鐘誤差，t^j 表衛星(j)之時鐘誤差，w_i^j ：對流層與電離層誤差，則載波相位觀測量：

$$\phi_i^j = \frac{1}{\lambda} \cdot D_i^j + \frac{c}{\lambda} \cdot (t_i - t^j) + \frac{1}{\lambda} \cdot w_i^j - N_i^j$$

在(t_1)時刻，測站 1 及 2 對衛星 1 之載波相位觀測量分別爲：

$$\phi_1^1(t_1) = \frac{1}{\lambda} \cdot D_1^1(t_1) + \frac{c}{\lambda} \cdot (t_1 - t^1) + \frac{1}{\lambda} \cdot w_1^1 - N_1^1$$

$$\phi_2^1(t_1) = \frac{1}{\lambda} \cdot D_2^1(t_1) + \frac{c}{\lambda} \cdot (t_2 - t^1) + \frac{1}{\lambda} \cdot w_2^1 - N_2^1$$

在(t_1)時刻，對衛星 1 載波相位觀測量之地面一次差如下：

$$\Delta\phi^1(t_1) = \phi_2^1(t_1) - \phi_1^1(t_1) = \frac{1}{\lambda} \cdot [D_2^1(t_1) - D_1^1(t_1)] + \frac{c}{\lambda} \cdot (t_2 - t_1) - (N_2^1 - N_1^1)$$

2. 空中一次差

將一部接收器同時對兩顆衛星之觀測量相減（差分），由於該接收器之時鐘誤差對此二觀測量之影響相同，因此差分結果可消除接收器時鐘誤差。

在(t_1)時刻，測站 1 對衛星 1 及 2 之載波相位觀測量分別為：

$$\phi_1^1(t_1)=\frac{1}{\lambda}\cdot D_1^1(t_1)+\frac{c}{\lambda}\cdot\left(t_1-t^1\right)+\frac{1}{\lambda}\cdot w_1^1-N_1^1$$

$$\phi_1^2(t_1)=\frac{1}{\lambda}\cdot D_1^2(t_1)+\frac{c}{\lambda}\cdot\left(t_1-t^2\right)+\frac{1}{\lambda}\cdot w_1^2-N_1^2$$

在(t_1)時刻，測站 1 載波相位觀測量之空中一次差如下：

$$\begin{aligned}\Delta\phi_1(t_1)&=\phi_1^2(t_1)-\phi_1^1(t_1)\\&=\frac{1}{\lambda}\cdot\left[D_1^2(t_1)-D_1^1(t_1)\right]+\frac{c}{\lambda}\cdot\left(t^1-t^2\right)+\frac{1}{\lambda}\cdot\left[w_1^2-w_1^1\right]-\left(N_1^2-N_1^1\right)\end{aligned}$$

(二) 二次差

如上圖，由測站r_1與r_2之兩部接收器同時對s_1與s_2兩顆衛星之觀測量，將測站r_1與r_2兩部接收器同時對衛星s_1之觀測量相減，得到一次差觀測方程式；將測站r_1與r_2之兩部接收器同時對衛星s_2之觀測量相減，亦得到一次差觀測方程式；由兩個一次差觀測方程式之差分，可得二次差觀測方程式。二次差可消除衛星時鐘誤差及接收器時鐘誤差。目前軟體通常採用二次差觀測量之求解方法，可消除時鐘誤差之影響，而不必考慮時鐘誤差模型，亦可減少時鐘誤差之未知數。

在(t_1)時刻，對衛星 2 載波相位觀測量之地面一次差如下：

$$\Delta\phi^2(t_1)=\phi_2^2(t_1)-\phi_1^2(t_1)=\frac{1}{\lambda}\cdot\left[D_2^2(t_1)-D_1^2(t_1)\right]+\frac{c}{\lambda}\cdot(t_2-t_1)-(N_2^2-N_1^2)$$

則在(t_1)時刻，載波相位觀測量之地面二次差如下：

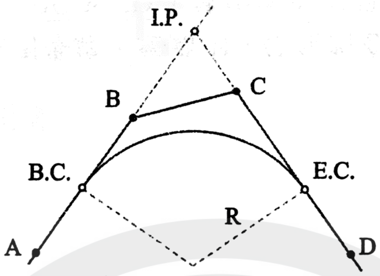
$$\begin{aligned}\nabla\Delta\phi(t_1)&=\Delta\phi^2(t_1)-\Delta\phi^1(t_1)\\&=\frac{1}{\lambda}\cdot[(D_2^2(t_1)-D_1^2(t_1))-(D_2^1(t_1)-D_1^1(t_1))]-[(N_2^2-N_1^2)-(N_2^1-N_1^1)]\end{aligned}$$

(三) 三次差

將兩個不同觀測時刻之二次差觀測方程式相減，可得三次差觀測方程式。在二次差中仍有週波未定值之影響，若無週波脫落（Cycle Slip），則三次差可進一步消除週波未定值之影響。由於三次差過度求差，將引起差分量間之相關，因此一般採用二次差。

※【資料來源】：本題請參考“實力測量學精修班教材〔第 14 章 P361〕”

四、一圓曲線如圖所示，其中切線交點（**I.P.**）無法於現場定樁，但於兩條切線上有四個已知控制點 **A**、**B**、**C**、**D**，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 及 $\overline{CD}$ 邊之方位角分別爲 $\varphi_{AB}=35°15'20''$、$\varphi_{BC}=75°20'40''$ 及 $\varphi_{CD}=144°48'30''$，$\overline{BC}$ 邊長度爲 **130 m**，**B** 點樁號爲 **150K + 328.25 m**，今欲測設之曲線半徑 **R** 爲 **165 m**，請計算曲線中心角、曲線弧長、曲線弦長、曲線起點（**B.C.**）樁號以及曲線終點（**E.C.**）樁號。**(20 分)**



【解題老師】張陳程老師　　　　　　　　　　　　　　　　　　　•105 年三等特考試題•

問題剖析

本題必須利用切線之方位角先計算曲線中心角（外偏角），再計算曲線弧長、弦長及樁號等資料。

參考解答

曲線中心角(外偏角) $I=\phi_{CD}-\phi_{AB}=144°48'30''-35°15'20''=109°33'10''$

曲線弧長：$R\cdot I\cdot\frac{\pi}{180°}=165\times109°33'10''\times\frac{\pi}{180°}=315.4894(m)$

曲線弦長：$2R\cdot\sin\frac{I}{2}=2\times165\times\sin\frac{109°33'10''}{2}=269.5794(m)$

切線長 $T=R\cdot\tan\frac{I}{2}=165\times\tan\frac{109°33'10''}{2}=233.6979(m)$

令交點(I.P.)爲 V 點 $\angle VBC=\phi_{BC}-\phi_{AB}=75°20'40''-35°15'20''=40°05'20''$

$$\overline{BV}=\frac{\overline{BC}}{\sin(180°-I)}\cdot\sin\left(I-\angle VBC\right)$$

$$=\frac{130}{\sin(180°-109°33'10'')}\cdot\sin\left(109°33'10-40°05'20\right)=129.1885(m)$$

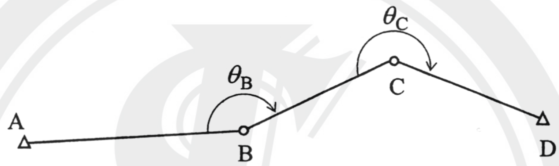
$$150328.25-\left(233.6979-129.1885\right)=150223.7406$$

$$150223.7406+315.4894=150539.2300$$

Ans：曲線中心角(外偏角)$I = 109°33'10"$
曲線弧長：$315.49m$
曲線弦長：$269.58m$
曲線起點(B.C.)樁號：$150K + 223.74$
曲線終點(E.C.)樁號：$150K + 539.23$

※【資料來源】：本題請參考“實力測量學精修班教材〔第 13 章 P315〕”

五、如圖所示，由已知控制點 **A** 施測導線，經點 **B**、**C** 後附合到已知控制點 **D**，觀測量為水平角$\boldsymbol{\theta_B}$、$\boldsymbol{\theta_C}$及水平距$\overline{\boldsymbol{AB}}$、$\overline{\boldsymbol{BC}}$及$\overline{\boldsymbol{CD}}$，請回答以下列問題：
(一)請提出一個計算點 B、C 座標之程序，若無法計算，亦須說明其原因。(15 分)
(二)請說明此導線測量是否具有多餘觀測？若有的話，其多於觀測數為何？(5 分)



【解題老師】張陳程老師 •105 年三等特考試題•

問題剖析

本題必須說明計算 B、C 點坐標之程序，並說明此導線之多餘觀測數。

參考解答

(一) 計算 B、C 點坐標$(E_B, N_B), (E_C, N_C)$之程序如下：

此導線的兩端未觀測連接角，無法直接從已知之方位角推算其他邊之方位角，因此以下將先假設起始邊之方位角。

令已知控制點 A 及 D 之坐標分別為$(E_A, N_A), (E_D, N_D)$，並計算得$\overline{AD}$及方位角ϕ_{AD}，假設方位角$\phi_{AB'} = 0°$，則：

$\phi_{B'C'} = \phi_{AB'} \pm 180° + \theta_B, \phi_{C'D'} = \phi_{B'C'} \pm 180° + \theta_C$

$E_{B'} = E_A + \overline{AB} \cdot sin\phi_{AB'}, N_{B'} = N_A + \overline{AB} \cdot cos\phi_{AB'}$

$E_{C'} = E_{B'} + \overline{BC} \cdot sin\phi_{B'C'}, N_{C'} = N_{B'} + \overline{BC} \cdot cos\phi_{B'C'}$

$E_{D'} = E_{C'} + \overline{CD} \cdot sin\phi_{C'D'}, N_{D'} = N_{C'} + \overline{CD} \cdot cos\phi_{C'D'}$

$(E_{D'}, N_{D'})$與(E_D, N_D)不一致，理由是$(E_{D'}, N_{D'})$由假設之起始方位角計算得到，其方位角有偏差。

由$(E_A, N_A), (E_{D'}, N_{D'})$計算得方位角$\phi_{AD'}$，則

$\emptyset_{AB} = \emptyset_{AB'} + (\emptyset_{AD} - \emptyset_{AD'})$

$\emptyset_{BC} = \emptyset_{AB} \pm 180° + \theta_B, \emptyset_{CD} = \emptyset_{BC} \pm 180° + \theta_C$

$\Delta E_1 = \overline{AB} \cdot sin\emptyset_{AB}, \Delta N_1 = \overline{AB} \cdot cos\emptyset_{AB}$

$\Delta E_2 = \overline{BC} \cdot sin\emptyset_{BC}, \Delta N_2 = \overline{BC} \cdot cos\emptyset_{BC}$

$\Delta E_3 = \overline{CD} \cdot sin\emptyset_{CD}, \Delta N_3 = \overline{CD} \cdot cos\emptyset_{CD}$

縱橫距閉合差爲：

$W_E = E_A + \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3 - E_D$

$W_N = N_A + \Delta N_1 + \Delta N_2 + \Delta N_3 - N_D$

$$E_B = E_A + \Delta E_1 + \left(-W_E \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}}\right)$$

$$N_B = N_A + \Delta N_1 + \left(-W_N \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}}\right)$$

$$E_C = E_B + \Delta E_2 + \left(-W_E \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}}\right)$$

$$N_C = N_B + \Delta N_2 + \left(-W_N \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}}\right)$$

(二) 此導線共觀測 2 個水平角及 3 個水平距，觀測量之個數 $n = 2 + 3 = 5$ 。
未知數爲 B、C 點坐標$(E_B, N_B), (E_C, N_C)$，未知數之個數 $u = 4$ 。
故本題具有多餘觀測，多餘觀測數 $r = n - u = 5 - 4 = 1$ 。

※【資料來源】：本題請參考“實力測量學精修班教材〔第 8 章 P232〕”