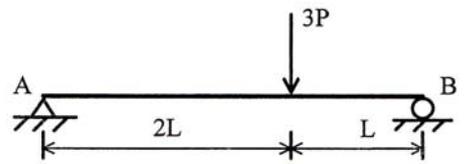


# 102 年公務人員高等考試試題結構學參考解答

本科由實力專任教師**林冠丞**老師即時解答

一、如圖所示之簡支梁，若楊氏模數  $E$  及斷面二次矩  $I$  皆為定值，試以共軛梁法求最大位移。(以其他方法求解一律不予計分) (25 分)



【解題老師】林冠丞老師

• 102 年土木高考試題 •

## 問題剖析

(1) 已知

- 剛度： $EI$
- 外力： $3P \downarrow$

(2) 待求

- 變位： $\Delta_{\max}$

(3) 方法

- **限** 共軛梁法

(4) 思路

- (外力)  $\rightarrow$  (內力)  $\rightarrow$  (變位)

## 參考解答

(1) (外力)  $\rightarrow$  (內力)

- 依據力的平衡繪製  $M$  圖 (圖 a)。

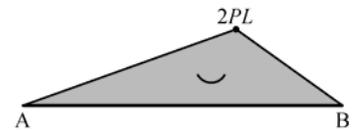


圖 a 彎矩圖

(2) (內力)  $\rightarrow$  (變位)

- 依據共軛梁法繪製共軛梁 (圖 b)，其中

$$F = \frac{1}{2}(3L) \left( \frac{2PL}{EI} \right) = \frac{3PL^2}{EI}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{3}(2L + 2 \times L) = \frac{4L}{3}$$

$$\bar{R}_A = \frac{F\bar{x}}{3L} = \frac{4PL^2}{3EI}$$

再取分離體圖 (圖 c)

$$F_1 = \frac{1}{2}(x) \left( \frac{Px}{EI} \right) = \frac{Px^2}{2EI}$$

$$[\Sigma M_o = 0]: \bar{M}_x = \left( \frac{4PL^2}{3EI} \right)(x) - (F_1) \left( \frac{x}{3} \right) = \frac{4PL^2x}{3EI} - \frac{Px^3}{6EI}$$

$$\text{令 } \frac{d\bar{M}_x}{dx} = 0, \frac{4L^2}{3} - \frac{x^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow x = 1.633L$$

$$\therefore \Delta_{\max} = \bar{M}_{x=1.633L} = \frac{1.452PL^3}{EI}$$

Key

$$\Delta_{\max} = \bar{M}_{\max}$$

位於集中外力的左側

## 【實力題型班熱力登場】

- 您是考場老生嗎？每次差個 3~5 分的，不想再年復一年吧！讓實力題型班為您補上臨門一腳，助您順利過關！
- 您是考場新手嗎？感覺時間不夠用，進度嚴重落後，怎麼辦？實力題型班幫您精準抓題，讓您輕鬆達陣！
- 9/2 起各科陸續開課，敬請把握舊制最後機會，先搶先贏喔！

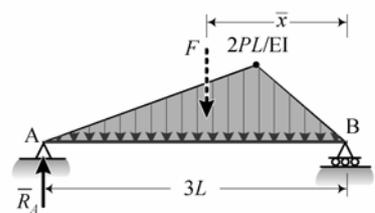


圖 b 共軛梁

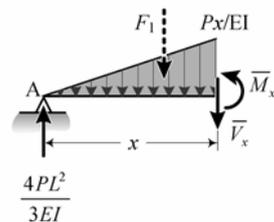


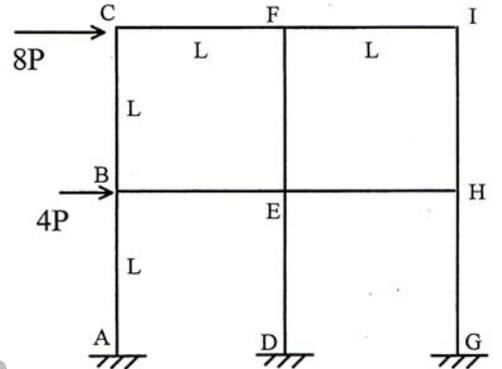
圖 c 分離體圖

$$\text{Ans: 最大變位 } A_{\max} = \frac{1.452PL^3}{EI} \quad (\downarrow)$$

※本題請參考“實力結構學上冊講義—P4-7〔例 4-3〕”

二、如圖所示受側力之剛構架 (rigid frame)，各層之層高皆為  $L$ ，梁長也為  $L$ 。門型法為一個近似分析該類剛構架受側力的方法，該方法採用以下之假設：

- (a) 每層柱之反曲點 (彎矩為零之點) 發生在柱中點；
- (b) 每根梁之中點也為反曲點；
- (c) 對任一樓層，每根外柱所受之剪力相同，而每根內柱之水平剪力為每根外柱的兩倍。試以門型法分析圖示之構架，結果以彎矩圖呈現，為清晰起見，畫兩張彎矩圖，一張是柱之彎矩圖，另一張為梁之彎矩圖；以上之彎矩圖直接畫在構架上。(25 分)



【解題老師】林冠丞老師

• 102 年土木高考試題 •

### 問題剖析

(1) 已知

- 幾何性質： $L$
- 外力： $P_1 = 4P \rightarrow$ ， $P_2 = 8P \rightarrow$

(2) 待求

- 內力： $M$  dia

(3) 方法

- 限門架法

(4) 思路

- (靜不定結構)  $\rightarrow$  (靜定結構)
- (外力)  $\rightarrow$  (內力)

### 參考解答

(1) (靜不定結構)  $\rightarrow$  (靜定結構)

- 依據門架法的假設
  - 假設①：梁的反曲點位於梁中點處。
  - 假設②：柱的反曲點位於柱中點處。
  - 假設③：同一門架依其跨長比例來承擔橫力，因此內柱剪力為外柱剪力的兩倍。
- $\therefore$  原靜不定結構已合理減化為靜定結構。

(2) (外力)  $\rightarrow$  (內力)

- 依據力的平衡
  - ① 圖 a  $[\Sigma F_x = 0]: 4V_2 = 8P$   
 $\Rightarrow V_2 = 2P$
  - ② 圖 b  $[\Sigma F_x = 0]: 4V_1 = 8P + 4P$   
 $\Rightarrow V_1 = 3P$

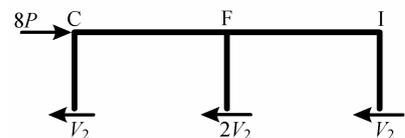


圖 a

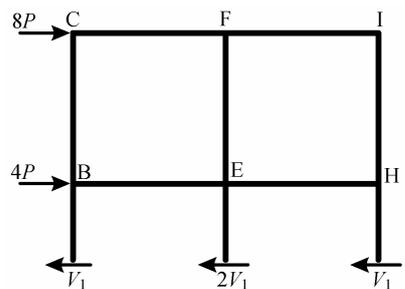


圖 b

### Key

經由合理的假設，將靜不定結構轉換成靜定結構，直接以力平衡即可分析內力

### 【實力出版熱烈搶購】

土木類國家考試系統題庫~即將出爐!

(一) 材力·結構 (三) 土力·基礎·地質

(二) RC·鋼構 (四) 施工·營管·工材·測量

一套共四冊，包含最近五年(97~101)重要國考完整詳解，7~8月陸續出版，為實力題型班的主要教材，先睹為快!

③再分別考慮圖 c 各分離體圖，可得各桿端彎矩。

其解題流程如下： $V_c \rightarrow M_c \rightarrow M_b \rightarrow V_b$

最後，再繪製彎矩圖（圖 d 及 e）。

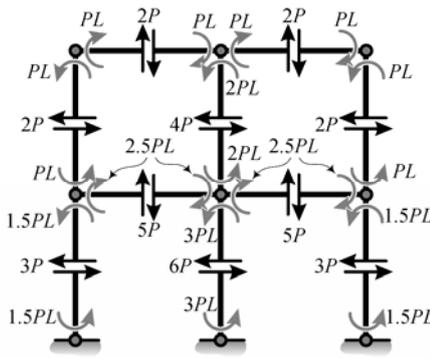


圖 c

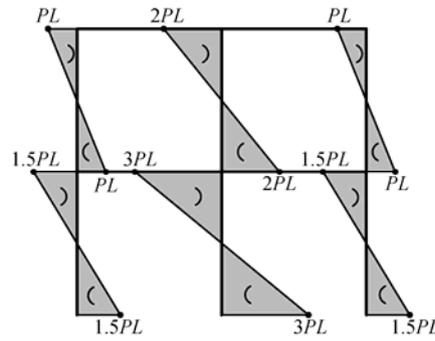


圖 d 柱之彎矩圖

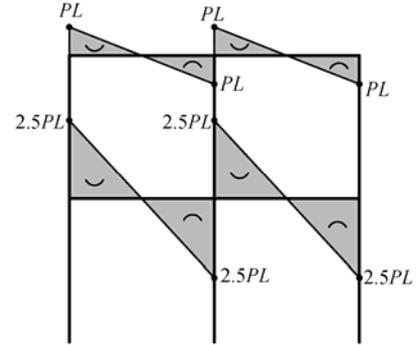
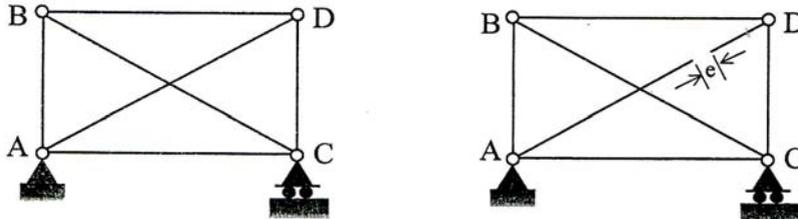


圖 e 梁之彎矩圖

Ans：(a)柱之彎矩圖如圖 d 所示  
(b)梁之彎矩圖如圖 e 所示

※本題請參考“實力結構學下冊講義—P6-18 [F4.1-1]”

三、如圖所示之桁架，各桿件都有相同之楊氏模數  $E = 200 \text{ GPa}$ 、斷面積  $A = 500 \text{ mm}^2$ 。對角桿件 AD 和 BC 其長度都為  $10 \text{ m}$ 、水平桿件 AC、BD 長度都為  $8 \text{ m}$ ，垂直桿件 AB、CD 長度都為  $6 \text{ m}$ 。今將 AD 桿件截去一微小段，其長度為  $e$ ，如圖示。若沿 AD 方向施加一對拉力於該缺口之兩端以閉合該缺口，已知該拉力等於  $8.68 \text{ kN}$  時恰可閉合該缺口，試以單位力法求缺口  $e$  之長度。（以其他方法求解一律不予計分）(25 分)



【解題老師】林冠丞老師

• 102 年土木高考試題 •

**問題剖析**

(1) 已知

- 材料性質： $E = 200 \text{ GPa}$
- 幾何性質： $A = 500 \text{ mm}^2$
- 外力： $P = 8.68 \text{ kN}$

(2) 待求

- 組合誤差： $e$

(3) 方法

- 限單位力法

(4) 思路

- (外力)  $\rightarrow$  (內力)  $\rightarrow$  (變位)

**參考解答**

(1) (外力)  $\rightarrow$  (內力)

- 依據力的平衡

欲求缺口長度  $e \Rightarrow$  於切口處施加一對單位力 (圖 b)。分別計算

**【實力讀書會-大家一起來討論】**

實力每週精選考題，隔週公佈解答。

先透過獨立思考及自我演練，  
再藉由讀書會做線上觀念交流及經驗分享。  
有效複習才能厚植實力，  
讓您的學習更精進！歡迎大家一起來加入！

**Key**

靜不定桁架之組合誤差問題，可轉換成靜定桁架之一般外力作用來處理

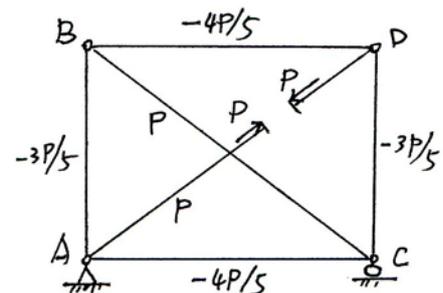


圖 a 真實外力作用

真實外力及虛單位力作用下的各桿內力。

桿件	$N_i$	$n_i$	$L_i$	$N_i n_i L_i$
AD BC	$P$	1	10	$10P$
AC BD	$-4P/5$	$-4/5$	8	$5.12P$
AB CD	$-3P/5$	$-3/5$	6	$2.16P$
$\Sigma$				$34.56P$

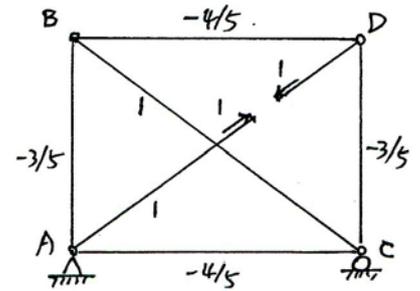


圖 b 單位力作用

(2) (內力) → (變位)

• 依據單位力法

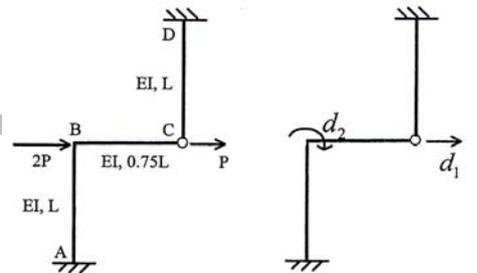
$$e = \frac{1}{EA} \Sigma (N_i n_i L_i) = \frac{34.56(8.68)}{(200)(500)} = 3 \times 10^{-3} \text{ m} = 3 \text{ mm}$$

Ans: 缺口長度  $e = 3 \text{ mm}$

**【實力小叮嚀】**  
 實力特別提醒您，  
 別錯過報名時間喔！  
 技師考試：8/6~8/15  
 地方特考：9/11~9/23

※本題請參考“實力結構學下冊講義—P7-73 [G4.3-1]”

四、考慮圖右所示之構架，假設軸向變形很小可以忽略，各桿件斷面之  $EI$  相同，長度如圖示。若以勁度法表示其平衡方程式，可寫為  $[K]\{D\}=\{P\}$ ，其中  $\{D\}$  為位移向量，依序包括 C 點水平位移  $d_1$  及 B 點旋轉角  $d_2$  兩個自由度（如圖示）， $[K]$  為結構勁度矩陣， $\{P\}$  為外力向量。試求  $[K]$  及  $\{P\}$ ，並求解  $\{D\}$ ，最後再以  $\{D\}$  求取各桿件之桿端彎矩及剪力並將結果以自由體圖呈現。（以其他方法求解一律不予計分）(25 分)



【解題老師】林冠丞老師

• 102 年土木高考試題 •

**問題剖析**

(1) 已知

- 剛度：EI
- 幾何性質： $L_{AB} = L_{CD} = L$ ， $L_{BC} = 0.75L$
- 外力： $2P \rightarrow$ ， $P \rightarrow$

(2) 待求

- 勁度矩陣： $[K]$
- 外力： $\{P\}$
- 變位： $\{D\}$
- 內力

(3) 方法

- 限勁度法

(4) 思路

- (結構型式) → (勁度矩陣)
- (外力) → (變位) → (內力)

**參考解答**

(1) 準備工作

- 設定座標 (圖 a 及 b)

**Key**

題目刻意在 B 及 C 點分別施加水平力，必須交待 B 點的  $2P$  是如何轉到座標上，才能完整得分

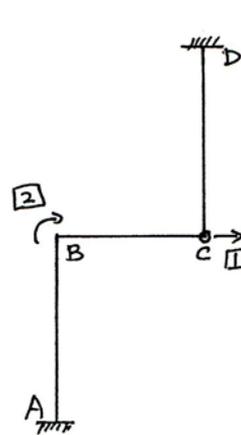


圖 a 標示自由度

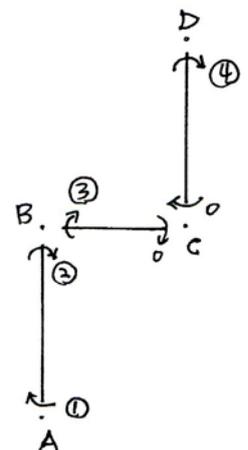


圖 b 標示待求桿端彎矩

本題有雙自由度 ( $\Delta_{CH}, \theta_B$ )

- 依據疊加原理

(原結構) = (圖 c 結構) + (圖 d 結構)

圖 c：約束自由度 (節點不動/不轉)

$$[Q^F] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

圖 d：放鬆自由度 (節點移動/轉動)

$$[P] = \begin{bmatrix} 3P \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) (結構型式) → (勁度矩陣)

- 依據勁度係數的定義

圖 e：令  $d_1 = 1, d_2 = 0$ ，可得

$$K_{11} = \frac{12EI}{L^3} + \frac{3EI}{L^3} = \frac{15EI}{L^3}$$

$$K_{21} = -\frac{6EI}{L^2}$$

圖 f：令  $d_2 = 1, d_1 = 0$ ，可得

$$K_{12} = -\frac{6EI}{L^2}$$

$$K_{22} = \frac{4EI}{L} + \frac{3EI}{(0.75L)} = \frac{8EI}{L}$$

$$\therefore [K] = EI \begin{bmatrix} 15/L^3 & -6/L^2 \\ -6/L^2 & 8/L \end{bmatrix}$$

(3) (外力) → (變位)

- 依據勁度矩陣連結外力-變位關係

$$[P] = [K][D]$$

或

$$\begin{bmatrix} 3P \\ 0 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 15/L^3 & -6/L^2 \\ -6/L^2 & 8/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2PL^3/7EI (\rightarrow) \\ 3PL^2/14EI (\curvearrowright) \end{bmatrix}$$

(4) (變位) → (內力)

- 依據內力轉換關係

$$[Q] = [T][D] + [Q^F]$$

或

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} -6/L^2 & 2/L \\ -6/L^2 & 4/L \\ 0 & 4/L \\ 3/L^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2PL^3/7EI \\ 3PL^2/14EI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9PL/7 \\ -6PL/7 \\ 6PL/7 \\ 6PL/7 \end{bmatrix}$$

最後再計算桿端剪力 (圖 g)。

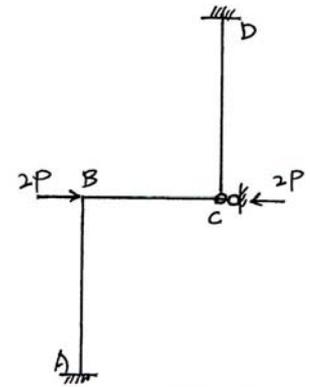


圖 c 約束自由度

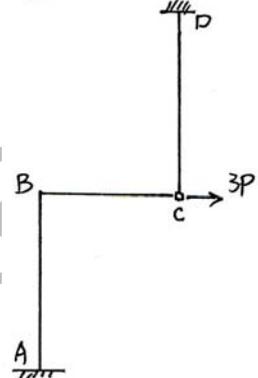


圖 d 放鬆自由度

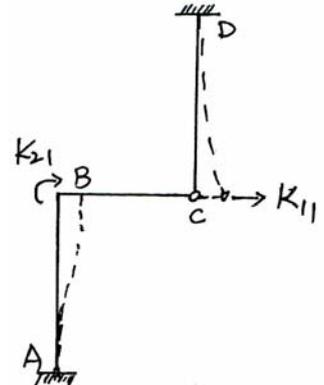


圖 e  $d_1 = 1, d_2 = 0$

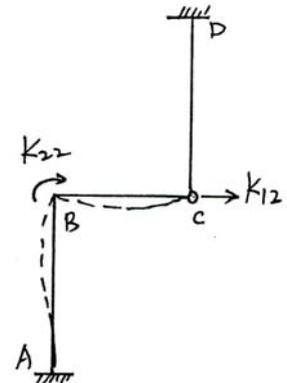


圖 f  $d_2 = 1, d_1 = 0$

Ans : (a)  $[P] = [K][D]$

$$\begin{bmatrix} 3P \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 8EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2PL^3/7EI \\ 3PL^2/14EI \end{bmatrix}$$

(b) 桿端彎矩及剪力如圖 g 所示

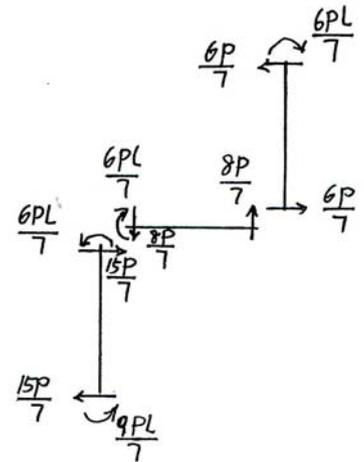


圖 g 桿端內力

※本題請參考“實力結構矩陣講義—P4-31〔例 4.13〕”

### 【講求效率創造實力】

- 籃球比賽不是比誰上場最久，也不是比誰出手最多，而是比誰“進球得分”最多！
- 參加考試不是比誰唸書最久，也不是比誰寫得最多，而是比誰“答對得分”最多！
- 用最短的時間獲取最高的分數，實力題型班讓您高效率得分才是王道！

實力網站上提供高普考部份科目解答

<http://www.shi-li.com.tw/>

實力技師“題型班”含最新試題完整詳解

### 【實力出版品質保證】

土木研究所考試-結構學系統題庫~~7月中隆重推出！

林冠丞老師親自執筆，包含最近十一年(92~102)五大名校

(台大/台科/成大/交大/中央)研究所考題完整詳解，

參加國考的您千萬別錯過，因為在本書中您將看到國考的影子，

讓您精確掌握國考的最新趨勢！