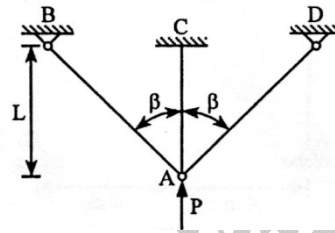


102 年專門職業及技術人員高等考試結構分析參考解答

一、有 3 根桿件所組成之結構如圖所示，點 B 及點 D 為鉸支撐，點 C 為固定支撐，點 A 為鉸節點。假設所有桿件行為皆為線彈性，且彈性模數 E 、橫斷面面積 A 及慣性矩 I 皆相同。如 A 點有一向上之 P 力作用。

- (a) C 點之彎矩為何？計算每根桿件所受之軸力為何（請註明其為拉力或壓力）？(15 分)
- (b) 如 P 力持續增加，計算第一根桿件挫屈時所對應之 P 值為何？(10 分)



【解題老師】林冠丞老師

• 102 年土木技師試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 材料性質： E
- 幾何性質： I, A
- 外力： P

(2) 待求

- 內力： N_i, M_C
- 最大外力：一桿先挫曲所對應之 P_{max}

(3) 思路

- (外力) \rightarrow (內力) \rightarrow (變位)
- (內力) \rightarrow (內力強度)

參考解答

(1) (外力) \rightarrow (內力)

- 依據力的平衡
- \because 考慮左右對稱 $\therefore M_C = 0$
- 選擇 C 點反力 R 作為贅力，可得

桿件	N_i	$\frac{\partial N_i}{\partial R}$	L_i	$N_i \frac{\partial N_i}{\partial R} L_i$
AC	$-R$	-1	L	RL
AB	$\frac{R-P}{2 \cos \beta}$	$\frac{1}{2 \cos \beta}$	$\frac{L}{\cos \beta}$	$\frac{(R-P)L}{4 \cos^3 \beta}$
AD	$\frac{R-P}{2 \cos \beta}$	$\frac{1}{2 \cos \beta}$	$\frac{L}{\cos \beta}$	$\frac{(R-P)L}{4 \cos^3 \beta}$

Key

先以最小功法解決靜不定，再考慮挫曲強度

“102 年土木技師” 考題講座

於 102/12/07(六) 13:30

實力學員可免費回班參加

* 另開放 15 個名額給非學員 *

欲參加者請來電或至實力櫃檯登記

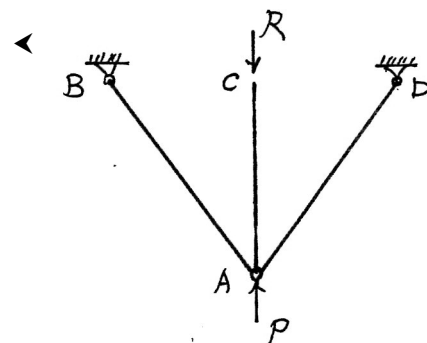


圖 a 贅力及基元結構

(2) (內力) → (變位)

- 依據最小功法

$$\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{1}{EA} \sum \left(N_i \frac{\partial N_i}{\partial R} L_i \right) = 0$$

或

$$RL + 2 \left[\frac{(R-P)L}{4\cos^3\beta} \right] = 0$$

$$\Rightarrow R = \frac{P}{1+2\cos^3\beta}$$

∴ 各桿軸力如圖 b 所示。

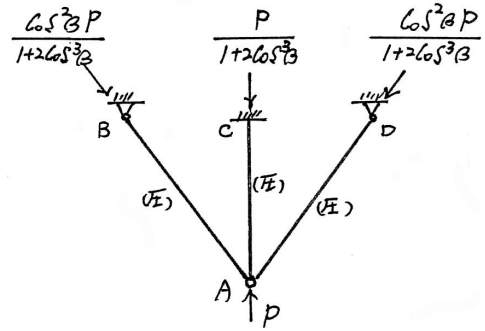


圖 b 各桿軸力

(3) (內力) → (內力強度)

- 依據尤拉公式

$$\textcircled{1} \text{ 令 } N_{AC} = N_{AC(cr)}$$

或

$$\frac{P_1}{1+2\cos^3\beta} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2}$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{2.04\pi^2 EI}{L^2} (1+2\cos^3\beta)$$

$$\textcircled{2} \text{ 令 } N_{AB} = N_{AB(cr)}$$

或

$$\frac{\cos^2\beta P_2}{1+2\cos^3\beta} = \frac{\pi^2 EI}{(L/\cos\beta)^2}$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{\pi^2 EI}{L^2} (1+2\cos^3\beta)$$

$$P_{\max} = \min(P_1, P_2) = \frac{\pi^2 EI}{L^2} (1+2\cos^3\beta)$$

Note

軸力最大未必最早挫曲(⊙Why?)

103 年技師高考【精修班】

台北班 1/3(五)18:30 材力

台中班 1/5(日)09:00 材力

高雄班 1/2(四)18:30 結構

其他課程陸續開課

~歡迎免費試聽~

Ans : (a) $M_C = 0$, 各桿軸壓力如圖 b 所示

(b) 第一根桿件挫曲時所對應的力

$$P_{\max} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} (1+2\cos^3\beta)$$

※資料來源：本題請參考“實力材料力學精修班教材〔例 I2.2-10〕”

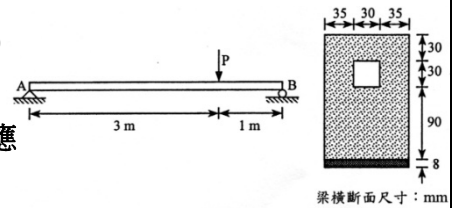
二、有一簡支梁受一集中載重 $P = 4 \text{ kN}$ 如圖所示，梁橫斷面由 100 mm 寬 150 mm 高之木材及 100 mm 寬 8 mm 高之鋼所組成，木材斷面中含有一 $30 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}$ 之正方形開孔。如木材之彈性模數 $E_w = 10 \text{ GPa}$ ，鋼之彈性模數 $E_s = 200 \text{ GPa}$ ，假設所有材料行為皆為線彈性。

(a) 此組合梁所受到之最大彎矩 M_{\max} 為何？(5 分)

(b) 計算此組合梁中性軸之位置。(5 分)

(c) 計算木材之最大彎矩應力 σ_w 及鋼之最大彎矩應力 σ_s ，並述明其為拉應力或壓應力。(15 分)

(註：計算最大彎矩及最大彎矩應力時以絕對值為參考標準。)



【解題老師】林冠丞老師

• 102 年土木技師試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 材料性質： $E_w = 10 \text{ GPa}$ ， $E_s = 200 \text{ GPa}$
- 幾何性質： $b = 100 \text{ mm}$ ， $h_1 = 150 \text{ mm}$ ， $h_2 = 8 \text{ mm}$
- 外力： $P = 4 \text{ kN}$

(2) 待求

- 外力： M_{\max}
- 中性軸位置： y_1
- 應力： σ_w ， σ_s

(3) 思路

- (外力) \rightarrow (內力) \rightarrow (應力)

參考解答

(1) 準備工作

- 計算剖面參數 (圖 a)

$$n = \frac{E_s}{E_w} = \frac{200}{10} = 20$$

$$y_1 = \frac{(100 \times 150)(75) + (2000 \times 8)(154) - (30 \times 30)(45)}{(100 \times 150) + (2000 \times 8) - (30 \times 30)}$$

$$= 117.9 \text{ mm}$$

$$y_2 = 158 - y_1 = 40.1 \text{ mm}$$

Key

以轉換剖面法分析複合材料之應力

Assume

兩材料緊密結合成一體

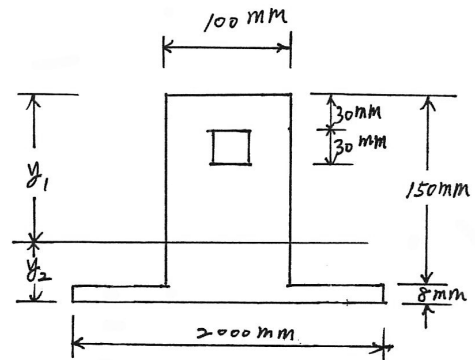


圖 a 轉換剖面

$$I_t = \frac{1}{3} \left[(100)(117.9)^3 + (2000)(40.1)^3 - (1900)(32.1)^3 \right] \\ - \left[\frac{(30)(30)^3}{12} + (30 \times 30)(117.9 - 45)^2 \right] \\ = 71.817 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

(2) (外力) → (內力)

- 依據力的平衡

$$R_A = \frac{P}{4} = 1 \text{ kN}$$

$$M_{\max} = M_C = 3R_A = 3 \text{ kN-m}$$

(3) (內力) → (應力)

- 依據彎曲應力公式

$$\sigma_{w,\max} = \frac{M_{\max} y_{w,\max}}{I_t} = \frac{(3 \times 10^6)(117.9)}{71.817 \times 10^6} \\ = 4.93 \text{ MPa (壓)}$$

$$\sigma_{s,\max} = \frac{nM_{\max} y_{s,\max}}{I_t} = \frac{(20)(3 \times 10^6)(40.1)}{71.817 \times 10^6} \\ = 33.50 \text{ MPa (拉)}$$

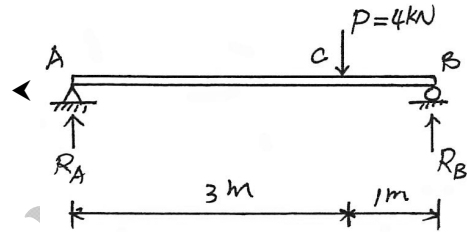


圖 b

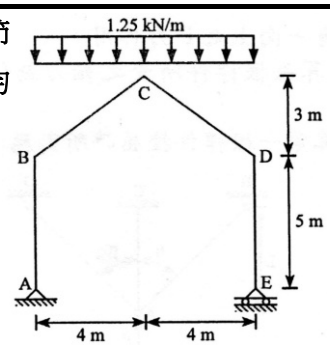
Ans : (a) 最大彎矩 $M_{\max} = 3 \text{ kN-m}$
 (b) 中性軸距上緣 $y_1 = 117.9 \text{ mm}$
 (c) 木材最大應力 $\sigma_{w,\max} = 4.93 \text{ MPa (壓)}$
 鋼最大應力 $\sigma_{s,\max} = 33.50 \text{ MPa (拉)}$

※資料來源：本題請參考“實力材料力學《系統剖析》〔例 D1.4-3〕”

三、考慮一靜定穩定之平面剛架結構，如圖所示，該剛架之節點 A 為鉸支撐，節點 E 為滾支撐，且 BC 和 CD 二構件均承受每單位水平長度(m)具 1.25 kN 大小之均佈載重。

(a) 試求節點 A 和節點 E 處之支承反力為何？(15 分)

(b) 試繪構件 BC 沿構件長度方向之剪力圖與彎矩圖。
(10 分)



【解題老師】林冠丞老師

• 102 年土木技師試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 外力： $w = 1.25 \text{ kN/m}$

(2) 待求

- 反力
- 內力圖： V dia. , M dia.

(3) 思路

- (外力) \rightarrow (反力、內力) \rightarrow (內力圖)

參考解答

(1) (外力) \rightarrow (反力、內力)

- 依據力的平衡

①圖 a $[\Sigma F_x = 0]$: $A_x = 0$

②圖 a $[\Sigma M_A = 0]$: $(1.25 \times 8)(4) - E_y(8) = 0$
 $\Rightarrow E_y = 5 \text{ kN} (\uparrow)$

③圖 a $[\Sigma M_C = 0]$: $A_y(4) - E_y(4) = 0$
 $\Rightarrow A_y = E_y = 5 \text{ kN} (\uparrow)$

④圖 b $[\Sigma F_x = 0]$: $C_x = 0$

⑤圖 b $[\Sigma F_y = 0]$: $5 - 5 + C_y = 0$
 $\Rightarrow C_y = 0$

⑥圖 b $[\Sigma M_C = 0]$: $M_C - (5)(2) = 0$
 $\Rightarrow M_C = 10 \text{ kN-m}$

將圖 b 的垂直力分解為圖 c 的軸向力及側向力。

(2) (反力、內力) \rightarrow (內力圖)

- 依據面積法

繪剪力圖及彎矩圖 (圖 d 及 e)。

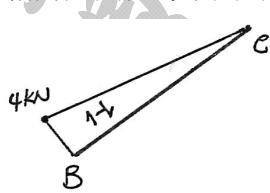


圖 d 剪力圖

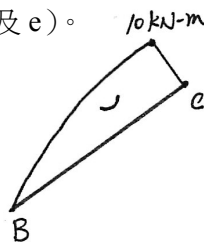


圖 e 彎矩圖

Ans : (a) 支承反力

$A_x = 0$, $A_y = E_y = 5 \text{ kN} (\uparrow)$

(b) 剪力圖 (圖 d) , 彎矩圖 (圖 e)

Key

繪內力圖前，須將垂直均佈荷重轉成桿件軸向及側向的荷重

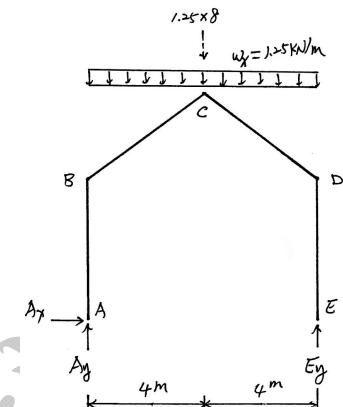


圖 a 整體分離體圖

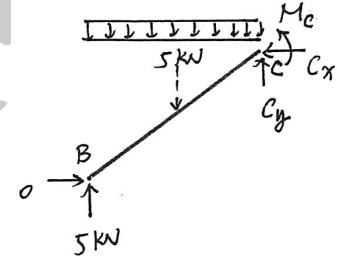


圖 b BC 段分離體圖

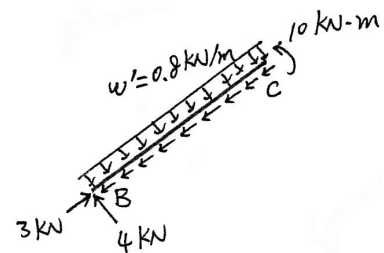


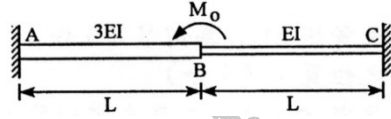
圖 c 力的分解

※資料來源：本題請參考“實力結構學精修班教材〔例 3-18〕”

四、考慮一超靜定非均勻梁結構，如圖所示，該梁之兩端均為固定端，構件 AB 和 BC 之彎矩剛度分別為常數 $3EI$ 和 EI ，且在點 B 處承受一集中力矩 M_0 作用。

(a) 試以傾角變位法求解各構件之端點彎矩，節點 B 之傾角和位移？(15 分)

(b) 試繪該梁之剪力圖和彎矩圖。(10 分)



【解題老師】林冠丞老師

• 102 年土木技師試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 剛度： $3EI$ ， EI
- 外力： M_0

(2) 待求

- 內力： M_{ij}
- 變位： θ_B ， Δ_B
- 內力圖： V dia.， M dia.

(3) 方法

- 限傾角變位法

(4) 思路

- (變位) → (變形) → (內力) → (外力)

參考解答

(1) 準備工作

- 判別自由度及待求桿端彎矩

本題有雙自由度 (圖 a)，其對應的待求桿端彎矩如圖 b 所示。

- 計算相對 $2EK$ 值

$$2EK_{AB} : 2EK_{BC} = \frac{2(3EI)}{L} : \frac{2(EI)}{L} = 3K : K$$

(令 $K = 2EI/L$)

(2) (變位) → (變形)

- 依據變位的諧合

由結點變位連線 (圖 c)，可得

$$R_{AB} : R_{BC} = \frac{\Delta_B}{L} : -\frac{\Delta_B}{L} = R : -R$$

Key

雙自由度必須找兩個力平衡方程式

$$\theta_B \Rightarrow [\Sigma M_B = 0]$$

$$R \Rightarrow [\Sigma F_y = 0]$$

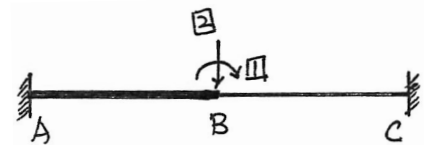


圖 a 自由度

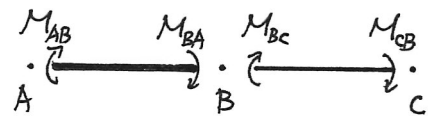


圖 b 待求桿端彎矩

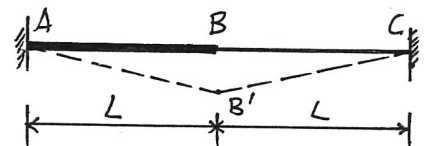


圖 c 結點變位連線

(令 $R = \Delta_B / L$)

∴ 選擇 θ_B 及 R 作為基本未知數

(3) (變形) → (內力)

• 依據桿端彎矩方程式

$$M_{AB} = 3K(\theta_B - 3R)$$

$$M_{BA} = 3K(2\theta_B - 3R)$$

$$M_{BC} = K(2\theta_B + 3R)$$

$$M_{CB} = K(\theta_B + 3R)$$

(4) (內力) → (外力)

• 依據力的平衡

① 圖 d $[\sum M_B = 0]: M_{BA} + M_{BC} + M_0 = 0$

$$8K\theta_B - 6KR = -M_0 \quad \dots(a)$$

② 圖 d $[\sum F_y = 0]: \left(\frac{M_{AB} + M_{BA}}{L}\right) - \left(\frac{M_{BC} + M_{CB}}{L}\right) = 0$

$$6K\theta_B - 24KR = 0 \quad \dots(b)$$

聯立(a)及(b)式，可得

$$K\theta_B = -\frac{2M_0}{13} \Rightarrow \theta_B = -\frac{M_0 L}{13EI} \quad (\curvearrowright)$$

$$KR = -\frac{M_0}{26} \Rightarrow \Delta_B = -\frac{M_0 L^2}{52EI} \quad (\uparrow)$$

將 $K\theta_B$ 及 KR 值代回步驟(3)，可得各桿端彎矩 (圖 e)，最後再繪製內力圖 (圖 f 及 g)。

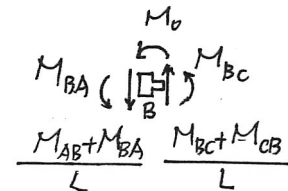


圖 d for θ_B and R

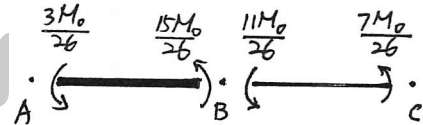


圖 e 桿端彎矩

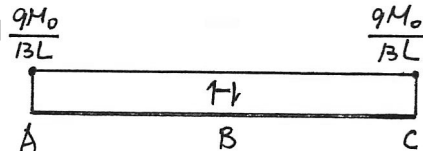


圖 f 剪力圖

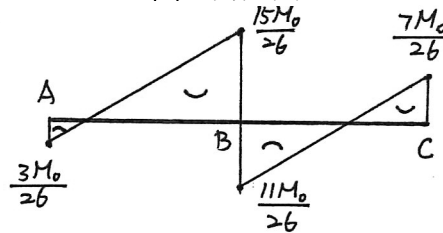


圖 g 彎矩圖 (繪於受壓側)

Ans : (a) 桿端彎矩如圖 e 所示
 $\theta_B = \frac{M_0 L}{13EI} \quad (\curvearrowright)$, $\Delta_B = \frac{M_0 L^2}{52EI} \quad (\uparrow)$
 (b) 剪力圖 (圖 f)，彎矩圖 (圖 g)

※資料來源：本題請參考“實力結構學精修班教材〔例 H2.2-2〕”

【土木技師結構設計第三題勘誤】

3. 強度檢核反求容許最大軸拉力

拉彎構件無 $P-\delta$ 或 $P-\Delta$ 放大效應，無 C_m 計算問題。直接以拉彎構件互制方程式

$f_a/F_t + f_{bx}/F_{bx} \leq 1.0$ 即可反求容許最大軸拉力。

$$\frac{f_a}{F_t} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} = \frac{P/84.12}{1.5} + \frac{40P/1185}{1.65} \leq 1.0。$$

$$\Rightarrow P \leq 35.236 \text{ tf。}$$

故容許最大軸拉力 $P_{\max} = 35.236 \text{ tf。}$