

101 年專門職業及技術人員高等考試結構分析參考解答

一、假設材料為均向性與線彈性。楊氏係數 $E = 50 \text{ GPa}$ ，泊生比 (Poisson's ratio) $\nu = 0.25$ 。
 在一個受外力的平面應力問題，某一點的應力大小為 $\sigma_{xx} = 140 \text{ MPa}$ ， $\sigma_{yy} = 20 \text{ MPa}$
 與 $\sigma_{xy} = 80 \text{ MPa}$ ：

- (a) 求此點的主應力；(10 分)
 (b) 求此點的剪應變 γ_{xy} 與正應變 ϵ_{xx} 。(10 分)

【解題老師】林冠丞老師

• 101 年土木技師試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 材料性質： $E = 50 \text{ GPa}$ ， $\nu = 0.25$
- 應力： $\sigma_{xx} = 140 \text{ MPa}$ ， $\sigma_{yy} = 20 \text{ MPa}$ ， $\sigma_{xy} = 80 \text{ MPa}$

Key

符號譯義

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_x \\ \sigma_{yy} &= \sigma_y \\ \sigma_{xy} &= \tau_{xy} \end{aligned}$$

(2) 待求

- 主應力： σ_{P1} ， σ_{P2}
- 應變： γ_{xy} ， ϵ_{xx}

Assume

拉為“+”，壓為“-”

(3) 思路

- (xy面應力) → (主應力)
- (xy面應力) → (xy向應變)

參考解答

(1) (xy 面應力) → (主應力)

- 依據平面的應力轉換

$$\text{令 } A = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = \frac{140 + 20}{2} = 80 \text{ MPa}$$

$$B = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} = \frac{140 - 20}{2} = 60 \text{ MPa}$$

$$C = \sigma_{xy} = 80 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{B^2 + C^2} = \sqrt{(60)^2 + (80)^2} = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{P1} = A + R = 80 + 100 = 180 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{P2} = A - R = 80 - 100 = -20 \text{ MPa}$$

(2) (xy 面應力) → (xy 向應變)

- 依據廣義虎克定律

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{50}{2(1+0.25)} = 20 \text{ GPa}$$

“101 年土木技師”完整試題講解
 於 101/12/11(二) 18:30
 實力學員可免費回班參加
 另開放 15 個名額給非學員

Note

考慮三維狀態，則第三個主應力為零 (⊙Why?)

$$\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G} = \frac{80}{20 \times 10^3} = 4 \times 10^{-3}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \\ &= \frac{1}{50 \times 10^3} [(140) - (0.25)(20 + 0)] \\ &= 2.7 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Ans : (a) 主應力為

$$\sigma_{P1} = 180 \text{ MPa (拉)}, \sigma_{P2} = -20 \text{ MPa (壓)}$$

$$(b) \text{ 剪應變 } \gamma_{xy} = 4 \times 10^{-3}$$

$$\text{正應變 } \varepsilon_{xx} = 2.7 \times 10^{-3}$$

Note

“正應變”即為“正交應變”

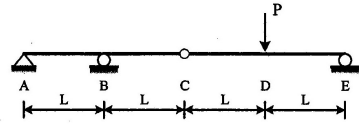
※資料來源：本題請參考“實力材料力學題型班補充教材[例 6-2]及[例 6-14]”

二、圖示為一平面梁。D 點受一垂直力 P ，其中 C 點為鉸接 (hinge)，各段梁的 EI 值相同，並為常數。限以共軛梁法 (conjugate-beam method) 求：

(a) D 點的轉角與垂直變位；(10 分)

(b) C 點的轉角。(10 分)

註：本題若使用其他方法，整題以零分計。答案以 P 、 L 、 E 及 I 等表之。



【解題老師】林冠丞老師

• 101 年土木技師試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 剛度： EI
- 外力： $P \downarrow$

(2) 待求

- 變位： θ_D ， Δ_D ， θ_{CL} ， θ_{CR}

(3) 方法

- 限共軛梁法

(4) 思路

- (外力) \rightarrow (內力) \rightarrow (變位)

Key

C 點為鉸接，所以必須分別求解左側及右側的轉角

實力專題講座

時間：102/1/2(三)

18:30~20:30

主題：最新考試動態及
應考策略剖析

(技師改制的最新動態)

~座位有限請先預約，額滿為止~

對象：實力學員可免費參加

另開放 15 個名額給非學員

參考解答

(1) (外力) → (內力)

- 依據力的平衡
繪製彎矩圖 (圖 a)

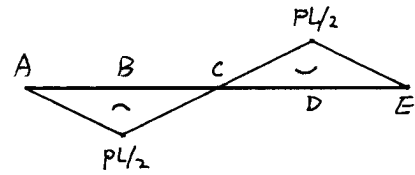


圖 a 彎矩圖

(2) (內力) → (變位)

- 依據共軛梁法
繪製共軛梁 (圖 b)，再分別取各分離體圖做計算

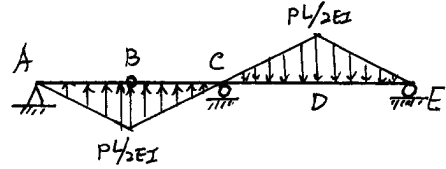


圖 b 共軛梁

圖 c $F = \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{2EI} \right) (L) = \frac{PL^2}{4EI}$

$$\bar{V}_B = \frac{2}{3} F = \frac{PL^2}{6EI}$$

圖 d $[\Sigma M_E = 0]:$

$$\left(\frac{2F}{3} \right) (3L) + (F) \left(\frac{8L}{3} \right) - \bar{R}_C (2L) - (2F)(L) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{R}_C = \frac{4}{3} F = \frac{PL^2}{3EI} \quad (\downarrow)$$

$$[\Sigma F_y = 0]: \bar{R}_E = 2F + \frac{4F}{3} - F - \frac{2F}{3} = \frac{5F}{3}$$

$$= \frac{5PL^2}{12EI} \quad (\uparrow)$$

圖 e $\bar{V}_{CL} = \frac{2}{3} F + F = \frac{5}{3} \left(\frac{PL^2}{4EI} \right) = \frac{5PL^2}{12EI} = \theta_{CL}$

圖 f $[\Sigma F_y = 0]: \bar{V}_{CR} = \bar{V}_{CL} - \bar{R}_C = \frac{5PL^2}{12EI} - \frac{PL^2}{3EI}$

$$= \frac{PL^2}{12EI} = \theta_{CR}$$

圖 g $[\Sigma F_y = 0]: \bar{V}_D = F - \frac{5F}{3} = \frac{2F}{3} = -\frac{PL^2}{6EI} = \theta_D$

$$[\Sigma M_E = 0]: \bar{M}_0 = F \left(\frac{2L}{3} \right) + \frac{2F}{3} (L) = \frac{4FL}{3}$$

$$= \frac{PL^3}{3EI} = \Delta_D$$

Ans : (a) D 點 $\theta_D = \frac{PL^2}{6EI}$ (↺), $\Delta_D = \frac{PL^3}{3EI}$ (↓)

(b) C 點 $\theta_{CL} = \frac{5PL^2}{12EI}$ (↻), $\theta_{CR} = \frac{PL^2}{12EI}$ (↻)

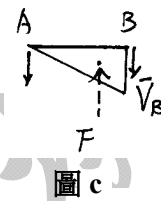


圖 c

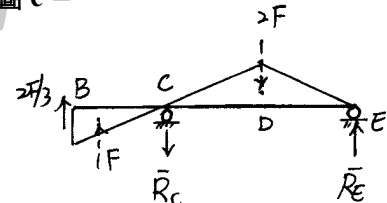


圖 d

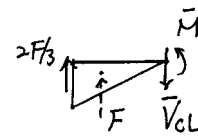


圖 e

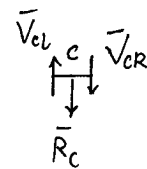


圖 f

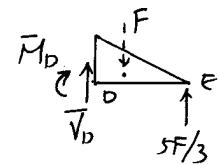


圖 g

※資料來源：本題請參考“實力結構學精修班教材—上冊〔例 4-5〕”

三、圖示為一平面剛架。B 點受 18kN 的水平力，而 BC

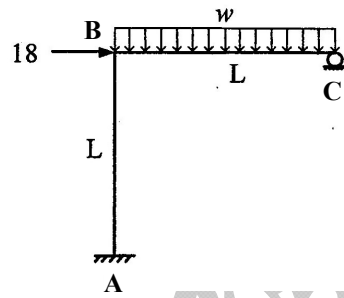
段則承受垂直均佈載重 $w = 4.8 \text{ kN/m}$ 。 $L = 5 \text{ m}$ ，

$E = 200 \text{ GPa}$ ， $I_{AB} = 2I$ ， $I_{BC} = I = 5 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ：

(a)限以傾角變位法 (slope-deflection method) 求各端點彎矩；(20 分)

(b)利用(a)之結果，畫此剛架的彎矩圖。(10 分)

註：本題若使用其他方法，整題以零分計。



【解題老師】林冠丞老師

• 101 年土木技師試題 •

問題剖析

(1)已知

- 材料性質： $E = 200 \text{ GPa}$
- 幾何性質： $I_{AB} = 2I = 10 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ，
 $I_{BC} = I = 5 \times 10^6 \text{ mm}^4$
- 外力： $P = 18 \text{ kN} \rightarrow$ ， $w = 4.8 \text{ kN/m} \downarrow$

(2)待求

- 內力： M_{ij}
- 內力圖： $M \text{ dia.}$

(3)方法

- 限 傾角變位法

(4)思路

- (變位) \rightarrow (變形) \rightarrow (內力) \rightarrow (外力)

Key

- ∴ C 點為滾支承
- ∴ 結構會有側移

林冠丞老師常說：

『最重要的靜不定解法是“傾角變位法”，最重要的題型是“有側移的正交剛架”，這種題目務必要好好把握，上榜才有機會。』見到本題毫無意外。

參考解答

(1)準備工作

- 判別自由度及待求桿端彎矩
本題有雙自由度，其對應的待求桿端彎矩如圖 a 所示。
- 計算相對 $2EK$ 值
$$2EK_{AB} : 2EK_{BC} = \frac{2E(2I)}{L} : \frac{2E(I)}{L} = 2K : K$$

(令 $K = 2EI/L$)
- 計算固端彎矩

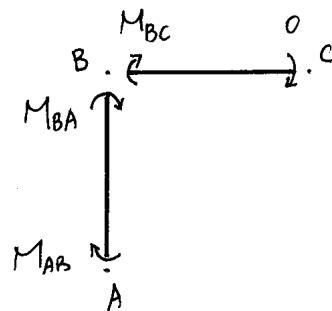


圖 a 待求桿端彎矩示意圖

$$M_{BC}^F = -\frac{(4.8)(5)^2}{8} = -15 \text{ kN-m}$$

(2) (變位) → (變形)

- 依據變位的諧合

由結點變位連線 (圖 b), 可得

$$R_{AB} : R_{BC} = R : 0 \quad (\text{令 } R = \Delta/5)$$

∴ 選擇 θ_B 及 R 作為基本未知數

(3) (變形) → (內力)

- 依據桿端彎矩方程式

$$M_{AB} = 2K(\theta_B - 3R)$$

$$M_{BA} = 2K(2\theta_B - 3R)$$

$$M_{BC} = K(1.5\theta_B) - 15$$

(4) (內力) → (外力)

- 依據力的平衡

圖 c $[\sum M_B = 0]: M_{BA} + M_{BC} = 0$

或

$$5.5K\theta_B - 6KR = 15 \quad \dots(a)$$

圖 d $[\sum F_x = 0]: \frac{M_{AB} + M_{BA}}{5} + 18 = 0$

$$6K\theta_B - 12KR = -90 \quad \dots(b)$$

聯立(a)及(b)式, 可得

$$K\theta_B = 24, \quad KR = 19.5$$

將 $K\theta_B$ 及 KR 值代回步驟(3), 可得各桿端彎矩 (圖 e) ◀

, 最後再繪製彎矩圖 (圖 f) ◀

Ans: 各桿端彎矩如圖 e 所示
彎矩圖如圖 f 所示

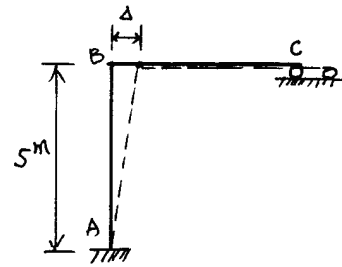


圖 b 結點變位連線

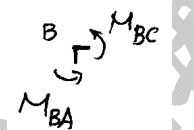


圖 c 分離體圖

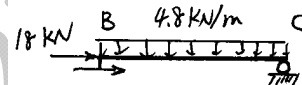


圖 d 分離體圖

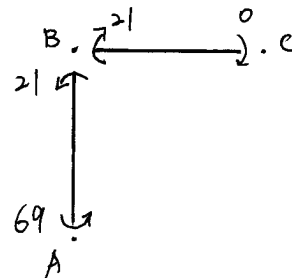


圖 e 桿端彎矩
(單位: kN-m)

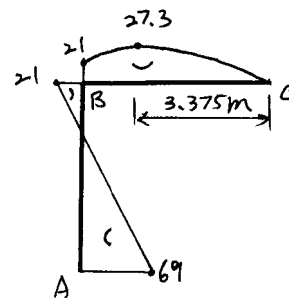


圖 f 彎矩圖
(單位: kN-m)

※資料來源：本題請參考“實力結構學題型班補充教材〔例 6-7〕”

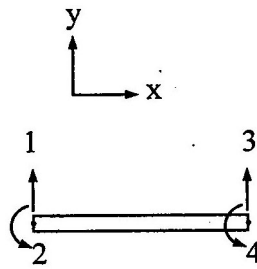
四、圖示為一平面梁，梁長 $L_{AB} = 2L$ ， $L_{BC} = L$ ， $I_{AB} = 1.5I$ ， $I_{BC} = I$ ，而 E 值則相同。支承 C 下陷 Δ ：

- (a) 限以直接勁度法求支承 B 與支承 C 的轉角；(20 分)
- (b) 利用 AB 的元素勁度矩陣與(a)之結果，求 B 點的彎矩。(10 分)

註：本題若使用其他方法，整題以零分計。答案以 L 、 Δ 、

I 、與 E 表之。元素勁度矩陣如下：

$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ \text{sym.} & & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ & & & 4 \end{bmatrix}$$



【解題老師】林冠丞老師

• 101 年土木技師試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 材料性質： E
- 幾何性質： $L_{AB} = 2L$ ， $L_{BC} = L$ ， $I_{AB} = 1.5I$ ， $I_{BC} = I$
- 支承擾動： $\Delta_C = \Delta \downarrow$

(2) 待求

- 變位： θ_B ， θ_C
- 內力： M_B

(3) 方法

- 限直接勁度法

(4) 思路

- (結構型式) → (勁度矩陣)
- (外力) → (變位) → (內力)

Key

當題目給定元素勁度矩陣時，切記要使用“座標疊加法”

林冠丞老師考前耳提面命：

『這種給定元素勁度矩陣的題型雖然過去不曾在土木技師出現，但今年很有可能考出來，一定要用座標疊加的方式答題才能拿高分，這將會是拉開與別人差距的大好機會。』，真是神準！

參考解答

(1) 準備工作

- 設定座標

標示共同座標 (圖 a)，其中有三個座標變位不為零。

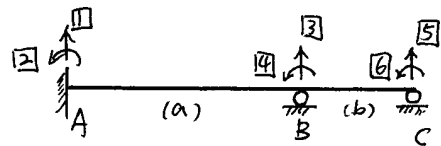


圖 a 共同座標

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ 0 \\ R_5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [r] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_4 \\ -\Delta \\ r_6 \end{bmatrix}$$

Note

若將支承擾動轉換成等值節點荷重，則 $[K]$ 可縮減為 2×2 ，也就是說只用 r_4 及 r_6 表示即可。

(2) (結構型式) → (勁度矩陣)

- 依據桿件勁度矩陣

$$[K^a] = [k^a] = \frac{E(1.5I)}{(2L)} \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$[K^b] = [k^b] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

您現在過得好嗎？
想要"突破"現況嗎？
"未來"要怎麼過，是一種選擇！
"現在"該怎麼做，是一種負責！
不怕不景氣，只怕不爭氣！
讓實力幫您爭一口氣！

- 依據相同座標相互疊加

$$[K] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

102 年技師高考【精修班】
台北班 1/3(四)18:30 材力
台中班 1/6(日)09:00 材力
高雄班 1/3(四)18:30 結構
其他課程陸續開課
~歡迎免費試聽~

(3) (外力) → (變位)

- 依據結構勁度矩陣連結外力－變位關係

$$[R] = [K][r]$$

或

$$\begin{bmatrix} 0 \\ R_5 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 7 & -6/L & 2 \\ -6/L & 12/L^2 & -6/L \\ 2 & -6/L & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_4 \\ -\Delta \\ r_6 \end{bmatrix}$$

求解上式，可得

$$r_4 = -\frac{\Delta}{2L} = \theta_B$$

$$r_6 = -\frac{5\Delta}{4L} = \theta_C$$

Note

若欲求解C點反力，可將 r_4 及 r_6 值代回上列矩陣式，即可得到 R_5

(4) (變位) → (內力)

- 依據元素勁度矩陣連結內力－變形關係

$$[Q^a] = [k^a][q^a]$$

或

$$\begin{bmatrix} Q_1^a \\ Q_2^a \\ Q_3^a \\ Q_4^a \end{bmatrix} = \frac{E(1.5I)}{(2L)} \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Q_4^a = \frac{3EI}{L} \left(-\frac{\Delta}{2L} \right) = -\frac{3EI\Delta}{2L^2} = M_B$$

Note

$$q_4^a = r_4$$

Ans : (a) 轉角 $\theta_B = \frac{\Delta}{2L}$ (↻), $\theta_C = \frac{5\Delta}{4L}$ (↻)

(b) 彎矩 $M_B = \frac{3EI\Delta}{2L^2}$ (梁下受壓)

※資料來源：本題請參考“實力結構學精修班結構矩陣教材〔例 5-4〕”

本年度所有結構分析考題，皆為林冠丞老師再三強調的重要題型，精修班/題型班/模擬考一再反覆叮嚀，果然完全命中！

實力專屬菁英師資 僅此一家別無分店

實力土木的專業教師群，僅在實力授課，絕無在其他補習班兼課！

有補習班長期打著挖角實力師資的宣傳，正突顯其師資不足，也間接肯定實力的師資陣容！

從去年起有若干學生受騙上當，請考生們勇於舉發不實宣傳，保障個人上課權益！