

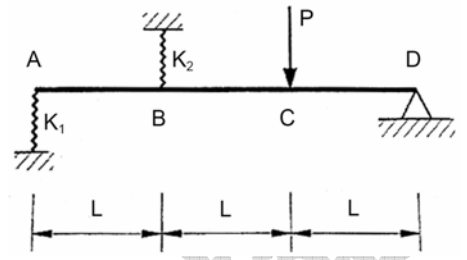
### 九十七年公務人員高等考試試題結構學參考題解

一、右圖梁 AD，左側之 A 點與 B 點分別由彈性係數為  $K_1$  及  $K_2$  之彈簧支撐，右側之 D 點則為簡支承，C 點有一集中載重  $P$ 。(25 分)

(一)若梁 AD 為剛體 (Rigid)，試求 D 點之旋轉角。(10 分) (假設  $K_1 = 2K_2$ )

(二)若梁 AD 為彈性體 (Elastic)，且其材料與斷面參數分別為  $E$ 、 $I$ ，試以(一)小題之結果，估算 D 點之旋轉角(一次解 first order solution)。(10 分) (假設  $K_1 = 2KI/L^3$  ;  $K_2 = KI/L^3$ )

(三)(二)小題之解為上限解 (upper bound solution) 或下限解 (lower bound solution) ? 試說明之。(5 分)



• 97 年土木高考試題 •

#### 參考題解

(1) (變位) → (變形)

- 依據變位的諧合 (圖 a)

選擇 D 點轉角  $\theta_D$  為基本未知數，可得

$$\delta_1 = (3L)(\theta_D) = 3L\theta_D$$

$$\delta_2 = (2L)(\theta_D) = 2L\theta_D$$

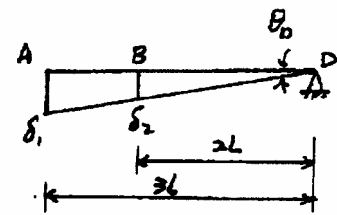


圖 a

(2) (變形) → (內力)

- 依據彈簧內力－變形關係

$$N_1 = K_1\delta_1 = (2K_2)(3L\theta_D) = 6K_2L\theta_D$$

$$N_2 = K_2\delta_2 = (K_2)(2L\theta_D) = 2K_2L\theta_D$$

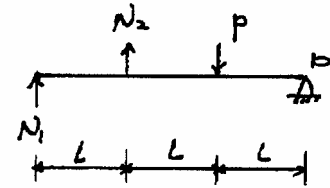


圖 b

(3) (內力) → (外力)

- 依據力的平衡 (圖 b)

$$[\Sigma M_D = 0]: N_1(3L) + N_2(2L) - P(L) = 0 \Rightarrow \theta_D = \frac{P}{22K_2L}$$

令  $K_2 = EI/L^3$ ，則

$$\theta_D = \frac{P}{22(EI/L^3)L} = \frac{PL^2}{22EI}$$

7/14 高考 “工程力學解答”

請上實力網站下載 [www.shi-li.com.tw](http://www.shi-li.com.tw)

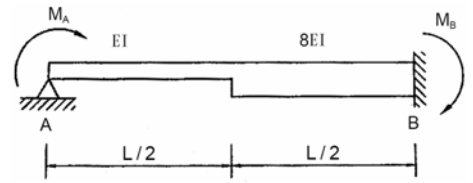
Ans :  $\left\{ \begin{array}{l} \text{(一)} \theta_D = \frac{P}{22K_2L} \\ \text{(二)} \theta_D = \frac{PL^2}{22EI} \\ \text{(三)} \text{(二)小題之解為下限解，因為梁的彈性變形將使得 } \theta_D \text{ 增大，所以假設梁為剛體所得之 } \theta_D \text{ 為下限解。} \end{array} \right.$

※本題請參考 “實力材料力學講義－上冊 [例題 B3.3-1]”

二、右圖所示之梁，假設在 A 點有彎矩  $M_A$  作用，並在該點產生單位轉角；同時在 B 點造成彎矩  $M_B$ 。(25 分)

(一)試以共軛梁法 (conjugate beam method) 求  $M_A$  及  $M_B$ ，並以  $E, I, L$  表示之。(15 分)

(二)請問在結構學中， $M_A$  與  $M_B/M_A$  各有何意義？又各被定義為何？(10 分)



• 97 年土木高考試題 •

**參考題解**

(1) (外力) → (內力)

- 依據組合法  
繪製彎矩圖 (圖 a)。

(2) (內力) → (變位)

- 依據共軛梁法  
繪製共軛梁 (圖 b)。為了簡化計算，將各分佈荷重以等值集中力取代，如圖 c 所示。其中

$$F_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{M_A}{16EI} \right) \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{M_A L}{64EI}, \quad F_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{M_B}{16EI} \right) \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{M_B L}{64EI}$$

考慮圖 c 的力平衡，可得

$$\begin{aligned} [\Sigma M_A = 0]: 16F_1 \left( \frac{L}{6} \right) + 8F_1 \left( \frac{L}{3} \right) + F_1 \left( \frac{2L}{3} \right) &= 8F_2 \left( \frac{L}{3} \right) + F_2 \left( \frac{2L}{3} \right) + 2F_2 \left( \frac{5L}{6} \right) \\ \Rightarrow 6F_1 - 5F_2 &= 0 \quad \dots\dots(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\Sigma F_y = 0]: 16F_1 + 8F_1 + F_1 - 8F_2 - F_2 - 2F_2 - 1 &= 0 \\ \Rightarrow 25F_1 - 11F_2 &= 1 \quad \dots\dots(b) \end{aligned}$$

聯立(a)及(b)式，可得

$$F_1 = \frac{5}{59} \Rightarrow M_A = 5.42 EI/L, \quad F_2 = \frac{6}{59} \Rightarrow M_B = 6.51 EI/L$$

Ans :  $\left\{ \begin{array}{l} \text{(一)} M_A = 5.42 EI/L \\ \quad M_B = 6.51 EI/L \\ \text{(二)} M_A \text{ 代表 A 點產生一單位轉角所需施加之彎矩，} \\ \quad \text{被定義為抗彎勁度 } K_{AA}。 \\ \quad M_B/M_A \text{ 代表 A 點彎矩傳遞至 B 點的比例，} \\ \quad \text{被定義為 A 至 B 的傳遞係數 } C_{AB}。 \end{array} \right.$

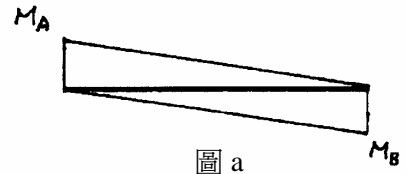


圖 a

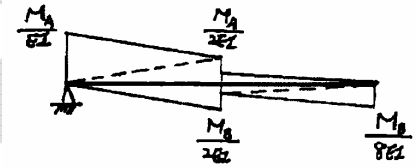


圖 b

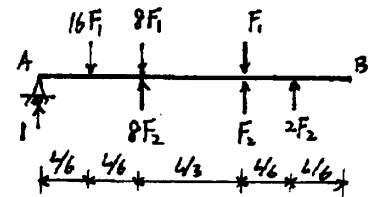
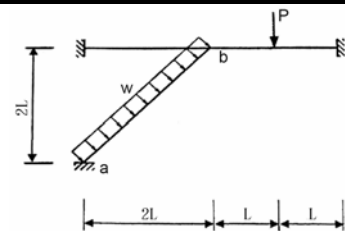


圖 c

※本題請參考“實力結構學講義一下冊 [例題 7.9]”

三、試以矩陣位移法分析右圖剛架 (不考慮軸力之影響)。  $L = 1 \text{ m}$ ， $w = 100 \text{ kgf/m}$ ， $P = 800 \text{ kgf}$ ，各桿件之  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ， $I = 1 \times 10^{-3} \text{ cm}^4$ 。試求：

- (一) b 點之垂直位移。(10 分)
- (二) a 點之反力。(15 分)



• 97 年土木高考試題 •

**參考題解**

**(1) 準備工作**

- 座標設定 (圖 a 及 b)  
本題僅有一個自由度 ( $\theta_b$ )
- 依據疊加原理  
(原結構) = (圖c結構) + (圖d結構)
- 由圖 c 可得固端彎矩

$$[Q^F] = \begin{bmatrix} -w(2\sqrt{2}L)^2/12 \\ w(2\sqrt{2}L)^2/12 \\ 0 \\ 0 \\ -P(2L)/8 \\ P(2L)/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -66.7 \\ 66.7 \\ 0 \\ 0 \\ -200 \\ 200 \end{bmatrix} \text{ kgf-m}$$

- 由圖 d 可得等值節點荷重  
 $[R] = [133.3] \text{ kgf-m}$

**(2) (結構型式) → (勁度矩陣)**

- 依據變位的諧合  
 $[a] = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]^T$
- 依據內力－變形關係

$$[k] = \frac{EI}{2L} \begin{bmatrix} 4/\sqrt{2} & 2/\sqrt{2} & & & & \\ 2/\sqrt{2} & 4/\sqrt{2} & & & & \\ & & 4 & 2 & & \\ & & 2 & 4 & & \\ & & & & 4 & 2 \\ & & & & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [K] = [a]^T [k] [a] = [5.41EI]$$

**(3) (外力矩陣) → (變位矩陣)**

- 依據勁度矩陣連結外力－變位關係

$$[r] = [K]^{-1} [R]$$

或

$$[r] = \left[ \frac{1}{5.41EI} \right] [133.3] = \left[ \frac{24.64}{EI} \right]$$

**(4) (變位矩陣) → (內力矩陣)**

- 依據內力轉換關係

$$[Q] = [k][a][r] + [Q^F]$$

或

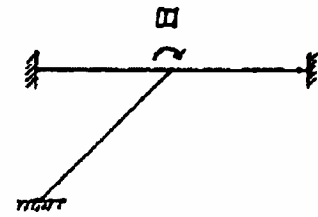


圖 a

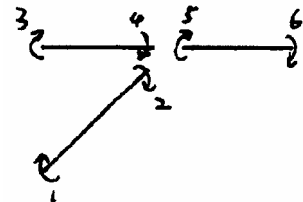


圖 b

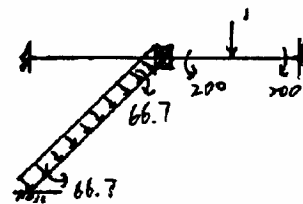


圖 c

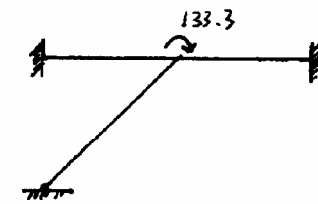


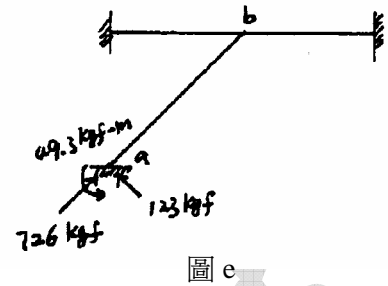
圖 d

實力台中及高雄班除現場上課  
尚有提供視訊課程與台北完全同步  
他班舊生尚有期限者報名  
實力精修班課程可吸收部份期限  
～詳情請洽實力櫃檯～

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI/\sqrt{2} \\ \sqrt{2}EI \\ EI \\ 2EI \\ 2EI \\ EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24.64 \\ EI \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -66.7 \\ 66.7 \\ 0 \\ 0 \\ -200 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -49.3 \\ 101.5 \\ 24.6 \\ 49.3 \\ -150.7 \\ 224.6 \end{bmatrix}$$

最後再計算 a 點反力。

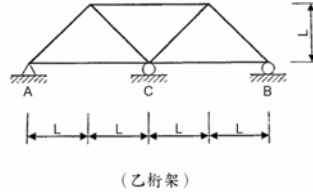
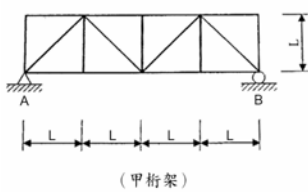
- Ans :  $\begin{cases} \text{(一) 因為不考慮軸向變形, 所以節點無側移,} \\ \text{b 點垂直位移 } \Delta_{bV} = 0. \\ \text{(二) a 點反力如圖 e 所示。} \end{cases}$



※本題請參考“實力結構矩陣講義 [例題 3.7]”

四、下圖所示二桁架 (Truss),  $L = 1 \text{ m}$ , 各桿件之  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $A = 10 \text{ cm}^2$ 。試求：

- (一) 若甲桁架 B 支承之基礎沉陷 0.05 mm, 則各桿件受力為何? (10 分)  
 (二) 若乙桁架 B 支承之基礎沉陷 0.05 mm, 則各桿件受力為何? (15 分)



• 97 年土木高考試題 •

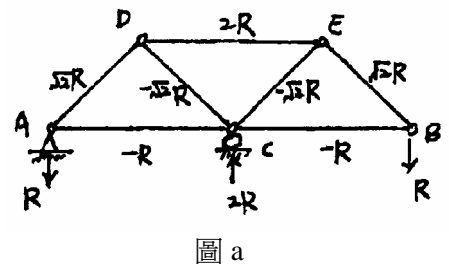
**參考題解**

(1) (外力) → (內力)

- 依據力的平衡  
 選擇 B 點反力為贅力  $R$ , 可得各桿內力, 如圖 a 所示。

(2) (內力) → (變位)

- 依據最小功法

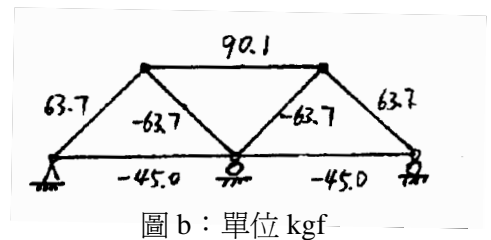


桿件	$N_i$	$\frac{\partial N_i}{\partial R}$	$L_i$	$N_i \frac{\partial N_i}{\partial R} L_i$
AC	$-R$	$-1$	$2$	$2R$
CB	$-R$	$-1$	$2$	$2R$
AD	$\sqrt{2}R$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}R$
BE	$\sqrt{2}R$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}R$
CD	$-\sqrt{2}R$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}R$
CE	$-\sqrt{2}R$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}R$
DE	$2R$	$2$	$2$	$8R$

$$\Delta_{BV} = \frac{\partial U}{\partial R} = \frac{1}{EA} \sum \left( N_i \frac{\partial N_i}{\partial R} L_i \right)$$

$$\text{或 } 0.05 \times 10^{-3} = \frac{23.31R}{(2.1 \times 10^6)(10)} \Rightarrow R = 45.05 \text{ kgf}$$

- Ans :  $\begin{cases} \text{(一) 甲桁架為靜定桁架, 各桿受力皆為零。} \\ \text{(二) 乙桁架為靜不定桁架, 各桿受力如圖 b 所示。} \end{cases}$



※本題請參考“實力結構學講義一下冊 [例題 7.25]”