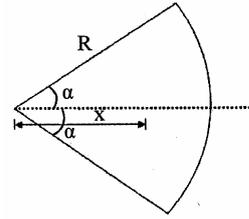


九十七年公務人員高等考試試題工程力學參考題解

一、推導圖示扇形區域的形心與圓心的距離 x 。

(註： x 須用 R ， α 之函數式表示之) (20 分)



【解題老師】許 弘 老師

• 97 年土木高考試題 •

問題剖析

(1) 扇形無法分割成簡單面積如矩形、三角形與圓形的組合，故在計算各種斷面性質時，必須使用積分的方式求解。

(2) 因為圖形上下對稱故形心位於 x 軸上。利用 $\bar{x} = \frac{\int x dA}{A}$ ，先設定微面積如圖 a 所示的微小四邊形體，先積分求出面積，再配合每個微面積的 $x = r \cos \theta$ 即可積分解得形心位置。

參考題解

參考圖 a

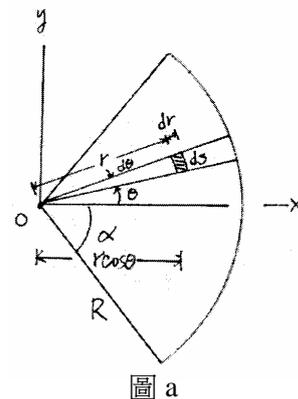
微面積 $dA = (ds)(dr) = (r d\theta)(dr)$

全面積 $A = \int dA = (2) \int_0^R \int_0^\alpha r d\theta dr = R^2 \alpha$

利用形心公式 $\bar{x} = \frac{\int x dA}{A}$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{(2) \int_0^R \int_0^\alpha r^2 \cos \theta d\theta dr}{R^2 \alpha} = \frac{\frac{2}{3} R^3 \sin \alpha}{R^2 \alpha} \\ &= \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha} \end{aligned}$$

(Ans)



觀念探討

Q1：如何檢核答案正確性？

A1：令 $\alpha = \pi/2$ 則圖形變成半圓形，此時 $\bar{x} = \frac{2R \sin(\pi/2)}{(3)(\pi/2)} = \frac{4R}{3\pi}$ 可知答案正確。

Q2：微面積有沒有另外的取法呢？

A2：當然有。讀者亦可以選取如圖 b 所示的弧形微面積，但是這樣選取必須要先知道

弧形微面積的形心為 $x = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ 才能求解的問題，顯然這不是較佳的微面積取法。

如果選取如圖 c 所示的類三角形微面積，我們就可輕易得知類三角形微面積的形心

為 $x = \frac{2R \cos \theta}{3}$ ，顯然這是較佳的微面積取法。

事實上不論是用弧形還是類三角形微面積，求形心時都只要一次積分即可。本題採用四邊形微面積搭配雙重積分求解，目的是為了讓讀者更瞭解其基本原理如何操作，讀者一定要自己動手練習不同微面積的求解過程喔！

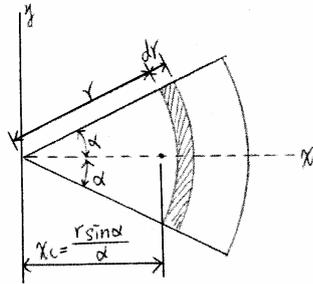


圖 b

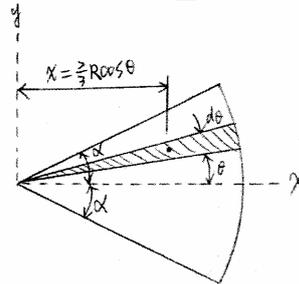
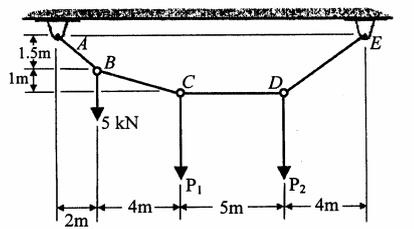


圖 c

二、如圖示，繩索系統 AE 分別於 B、C、D 三點受集中載重 (concentrated force) 作用。若已知 CD 繩索維持水平，試計算集中載重 P_1 與 P_2 之大小，另請計算繩索系統中之最大張力。(20 分)



【解題老師】許 弘 老師

• 97 年土木高考試題 •

問題剖析

- (1) 本題由於外力 P_1 、 P_2 未知，加上四個支承反力共計六個未知數，故直接由整體自由體的力平衡無法求出反力與外力。應利用繩索斷面內力無彎矩、剪力的特性，依序取 B、C、D、E 點各段自由體的力矩平衡即可計算出所需外力。
- (2) 因繩索系統在無水平外力作用下，其每段繩索的水平分量皆相同。利用此特性即可知最大繩張力必出現在傾角最大的繩索。

參考題解

(1) 力平衡求 P_1 、 P_2

圖 a $[\Sigma F_x = 0]: R_{Ax} = R_{Ex}$

圖 b $[\Sigma M_B = 0]: (R_{Ay})(2) - (R_{Ax})(1.5) = 0$
 $\Rightarrow R_{Ay} = 0.75R_{Ax}$

圖 c AC 段

$[\Sigma M_C = 0]: (R_{Ay})(6) - (R_{Ax})(2.5) - (5)(4) = 0$
 $\Rightarrow R_{Ax} = 10\text{ kN} (\leftarrow)$
 $R_{Ex} = 10\text{ kN} (\rightarrow)$
 $R_{Ay} = 7.5\text{ kN} (\uparrow)$

圖 d $[\Sigma M_D = 0]: (R_{Ay})(11) - (R_{Ax})(2.5) - (5)(9) - (P_1)(5) = 0$
 $\Rightarrow P_1 = 2.5\text{ kN}$

圖 e $[\Sigma M_E = 0]: (R_{Ay})(15) - (5)(13) - (P_1)(9) - (P_2)(4) = 0$
 $\Rightarrow P_2 = 6.25\text{ kN}$

(2) 計算最大繩張力

因為各索的水平分量皆相同，皆為 10 kN。

故索的傾角愈大索的張力就愈大。

AB 索最為傾斜，故 $T_{\max} = T_{AB}$ 。

$$T_{\max} = T_{AB} = (10) \left(\frac{\sqrt{2^2 + 1.5^2}}{2} \right) = 12.5\text{ kN}$$

Ans : $\begin{cases} P_1 = 2.5\text{ kN} \\ P_2 = 6.25\text{ kN} \\ T_{\max} = T_{AB} = 12.5\text{ kN} \end{cases}$

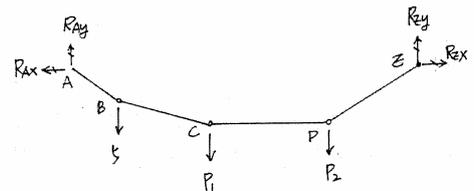


圖 a

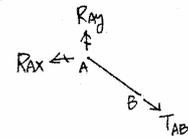


圖 b

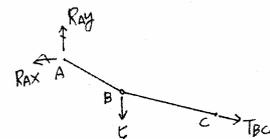


圖 c

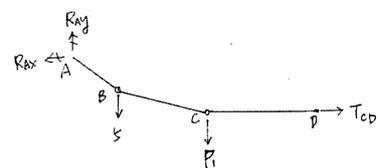


圖 d

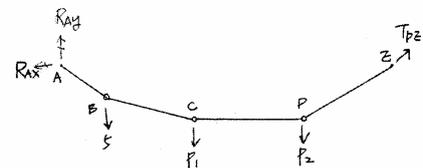


圖 e

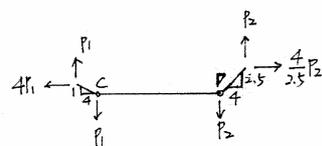
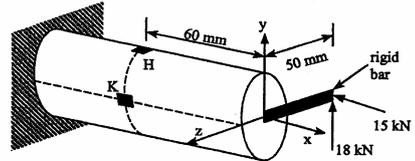


圖 f

實力技師“題型班”含最新試題完整詳解

即日起至八月底報名題型班只要 15,000 元

三、有一長 50 mm 剛性桿件 (rigid rod) 聯結於一直徑為 40 mm 之圓形斷面懸臂梁的自由端如圖所示，此剛性桿件之末端受到 15 kN 之水平力及 18 kN 之垂直力。試計算 H 點及 K 點之正向應力 (normal stress) 及剪應力 (shear stress)。(20 分)



【解題老師】林冠丞 老師

• 97 年土木高考試題 •

問題剖析

(1) 已知：

- 構件尺寸 $\Rightarrow d = 40 \text{ mm}$
- 外力 $\Rightarrow P_x = 15 \text{ kN}, P_y = 18 \text{ kN}$

(2) 待求：

- 應力 $\Rightarrow \sigma, \tau$

(3) 題型：合成應力 \gg 軸力 + 剪力 + 扭矩 + 彎矩

(4) 思路：(外力) \rightarrow (內力) \rightarrow (應力)

參考題解

(1) 準備工作

- 計算剖面參數

$$A = \frac{\pi(40)^2}{4} = 1256.7 \text{ mm}^2$$

$$S = \frac{\pi(40)^3}{32} = 6283 \text{ mm}^3$$

$$J = \frac{\pi(40)^4}{32} = 251,327 \text{ mm}^4$$

(2) (外力) \rightarrow (內力)

- 依據力的平衡

$$N_x = P_x = 15 \text{ kN}$$

$$V_y = P_y = 18 \text{ kN}$$

$$T_x = P_y L_z = 18(50) = 900 \text{ kN-mm}$$

$$M_y = P_x L_z = 15(50) = 750 \text{ kN-mm}$$

$$M_z = P_y L_x = 18(60) = 1080 \text{ kN-mm}$$

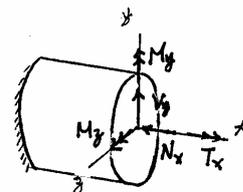


圖 a

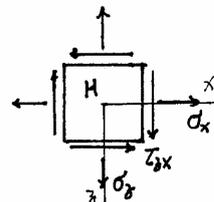


圖 b

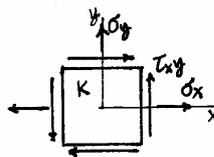


圖 c

(3) (內力) → (應力)

- 依據應力合成

(H 點)

$$\sigma_x = -\frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{S} = -\frac{15 \times 10^3}{1256.7} - \frac{1080 \times 10^3}{6283}$$

$$= -183.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_{zx} = \frac{16T_x}{\pi d^3} = \frac{16(900 \times 10^3)}{\pi(40)^3} = 71.6 \text{ MPa}$$

(K 點)

$$\sigma_x = -\frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{S} = -\frac{15 \times 10^3}{1256.7} + \frac{750 \times 10^3}{6283}$$

$$= 107.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{4V_y}{3A} - \frac{16T_x}{\pi d^3} = \frac{4(18 \times 10^3)}{3(1256.7)} - 71.6$$

$$= -52.5 \text{ MPa}$$

- Ans :
 - H點應力元素如圖d所示
 - K點應力元素如圖e所示

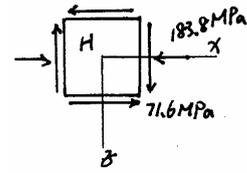


圖 d

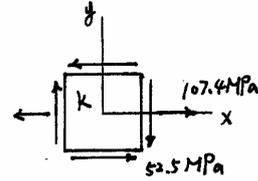


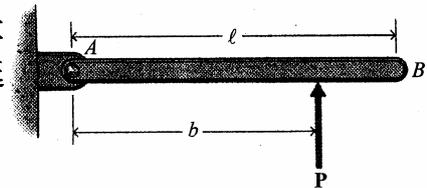
圖 e

※讀者宜注意：本題僅依照題目給定的方向計算應力即可。若欲求其他方向的應力，可再透過應力轉換公式，讀者可嘗試計算本題的主應力及最大剪應力。

四、如圖所示，一均勻細桿 AB ($m = 3 \text{ kg}$, $l = 800 \text{ mm}$)

靜止在一無摩擦之水平面上，並以衝量 $P\Delta t = 5 \text{ N} \cdot \text{sec}$ 撞擊之，若 $b = 300 \text{ mm}$ ，且撞擊延時為 $\Delta t = 0.002 \text{ sec}$ ，試求：

- (一) 撞擊後桿之瞬時角速度。(10 分)
- (二) A 點反力之大小。(10 分)



【解題老師】許 弘 老師

• 97 年土木高考試題 •

問題剖析

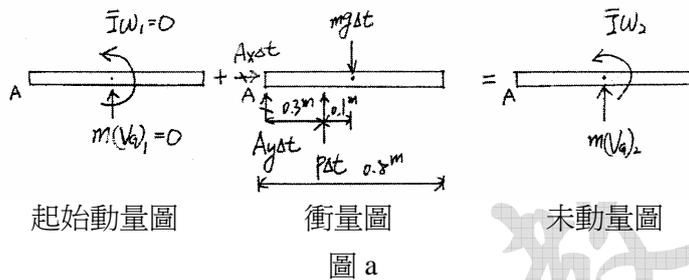
本題為衝量—動量考題，讀者解題時先要畫出衝量圖與動量圖。其中動量圖就是質心的 mv_G 、 $\bar{I}\omega$ ；衝量圖就是桿件上的受力直接乘上 $\Delta t = 0.002\text{sec}$ 。利用衝量—動量原理即可解題。

參考題解

(1) 計算角速度

因桿件本為靜止， $\omega_1 = (V_G)_1 = 0$

A 點為鉸支承 $(V_G)_1 = (0.4)(\omega_2)$



參考圖 a

$$m(V_{Gx})_1 + \Sigma \int F_x dt = m(V_{Gx})_2$$

$$0 = A_x \Delta t = 0$$

$$\Rightarrow A_x \Delta t = 0$$

$$(\bar{I}\omega_1)_A + \Sigma \int M_A dt = (\bar{I}\omega_2)_A$$

$$0 + [(P\Delta t)(0.3) - (mg\Delta t)(0.4)] = \bar{I}\omega_2 + m(V_a)_2(0.4)$$

$$(5)(0.3) - (3 \times 9.81 \times 0.002)(0.4) = \frac{(3)(0.8)^2}{12} \omega_2 + (3)(0.4)^2 \omega_2$$

$$\Rightarrow \omega_2 = 2.307 \text{ rad/s} \quad (\text{Ans})$$

(2) 計算支承反力

$$m(V_{Gy})_1 + \Sigma \int F_y dt = m(V_{Gy})_2$$

$$0 + [P\Delta t + A_y \Delta t - mg\Delta t] = m(V_a)_2$$

$$5 + (A_y)(0.002) - (3 \times 9.81)(0.002) = (3)(0.4 \times 2.307)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_y = -1086.37 \text{ N } (\downarrow) \\ A_x = 0 \end{cases} \quad (\text{Ans})$$

五、皮托管 (Pitot tube) 流速計上面水銀刻劃讀數為 40 mm，則所量得的水流流速為何？（水銀比重 13.6，重力加速度 g 為 9.81 m/sec^2 ）(20 分)

【解題老師】鍾政甫 老師

• 97 年土木高考試題 •

問題剖析

- (1) 皮托管問題類似於文德利管，均屬於類似的問題；例如流力講義之例題 2-1 (圖 a)。水銀管中之壓力差即為 A 與 B 之壓力差。
- (2) 題目要求流速，需立即聯想到與流速有關的三大方程式：連續方程、動量方程與能量方程。
- (3) 連續方程需使用到流量 Q 或斷面積 A ，但題目均無提到，使用之機率不高。
- (4) 本題無提到「力」，有也不會使用到動量方程。
- (5) 承(3)與(4)，故聯想到使用伯努力方程式，即可求出答案。

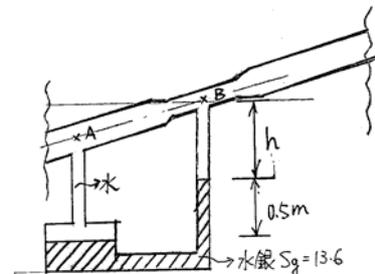


圖 a

參考題解

- (1) 題意如圖 b 所示。
- (2) 假設：
 - ① 穩態流 (steady flow)
 - ② 不可壓縮流
 - ③ 無摩擦損失
 - ④ 1 與 2 點之間無高程差
 - ⑤ 1 點之流速為 0 (流體受阻於皮托管入口)
- (3) 利用伯努力方程式 (能量守恆方程式)

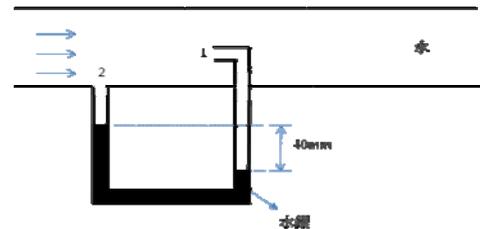


圖 b

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\because \gamma = \rho g, \text{ 故上式} \Rightarrow \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\text{同乘以 } g \Rightarrow \frac{P_1}{\rho_w} + Z_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho_w} + Z_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{\rho_w} + gZ_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho_w} + gZ_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

$$\Rightarrow v_2^2 = \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho_w} \quad \dots \textcircled{1}$$

其中 ρ_w 為水之密度 1000 kg/m^3 。

而 $P_1 - P_2$ 即為 1 與 2 之壓力差

亦即相當於 40 mm 水銀柱之壓力

$$\text{故： } P_1 - P_2 = \rho_{Hg} \times g \times \Delta H = (SG_{Hg} \times \rho_w) \times g \times \Delta H$$

$$= 13.6 \times 1000 \times 9.81 \times 0.04 = 5336.64$$

代回①式：

$$\textcircled{1} \Rightarrow v_2^2 = \frac{2(5336.64)}{1000}$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2(5336.64)}{1000}} = 3.27 \text{ m/s}$$

故管中水流流速為 3.27 m/s

實力台中及高雄班除現場上課尚有提供視訊課程與台北完全同步

他班舊生尚有期限者報名實力精修班課程可吸收部份期限

～詳情請洽實力櫃檯～