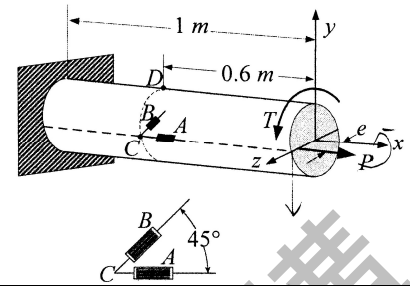


101 年公務人員高等考試試題工程力學參考解答

本科由實力專任教師**林冠丞老師**、**許弘老師**、**劉力老師**即時解答

一、直徑 $d = 50 \text{ mm}$ 之實心圓桿受到偏心距 $e = d/4 = 12.5 \text{ mm}$ 之偏心軸力 P 及扭矩 T 作用時（偏心軸力 P 及扭矩 T 為未知），應變量計（strain gage）量測圓桿表面 C 點，在 A 及 B 方向（A 與 B 方向夾角為 45° ）的應變為 $\varepsilon_A = 100 \times 10^{-6}$ ， $\varepsilon_B = -300 \times 10^{-6}$ ，如右圖所示。設此桿之楊氏模數 $E = 200 \text{ GPa}$ ，包森比 $\nu = 0.3$ ，求在 D 點之主應力（principal stress），及自由端之扭轉角 ϕ 。（20 分）



【解題老師】林冠丞老師

• 101 年土木高考試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 材料性質： $E = 200 \text{ GPa}$ ， $\nu = 0.3$
- 幾何性質： $d = 50 \text{ mm}$ ， $e = 12.5 \text{ mm}$
- 應變： $\varepsilon_A = 100 \times 10^{-6}$ ， $\varepsilon_B = -300 \times 10^{-6}$

(2) 待求

- 主應力： $\sigma_{P,D}$
- 變位： ϕ

(3) 思路

- (斜向應變) \rightarrow (xy 向應變) \rightarrow (xy 面應力) \rightarrow (內力) \rightarrow (外力)
- (外力) \rightarrow (內力) \rightarrow (xz 面應力) \rightarrow (主應力)
- (外力) \rightarrow (變位)

參考解答

(1) 準備工作

- 計算材料參數

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200}{2(1+0.3)} = 76.92 \text{ GPa}$$

- 計算剖面參數

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(50)^2}{4} = 1963.5 \text{ mm}^2$$

$$S = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi(50)^3}{32} = 12,272 \text{ mm}^3$$

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(50)^4}{32} = 613,592 \text{ mm}^4$$

(2) (斜向應變) \rightarrow (xy 向應變)

- 依據應變轉換公式

$$\varepsilon_x = \varepsilon_A = 100 \mu$$

$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x = -0.3(100 \mu) = -30 \mu$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45} - \varepsilon_x - \varepsilon_y = 2(-300 \mu) - (100 \mu) - (-30 \mu) = -670 \mu$$

(3) (xy 向應變) \rightarrow (xy 面應力)

- 依據廣義虎克定律

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = (200 \times 10^3)(100 \mu) = 20 \text{ MPa}$$

技師高考【題型班】

9/03(一) 18:30 土力開課

9/06(四) 18:30 材力開課

9/08(六) 18:00 測量開課

~ 歡迎免費試聽 ~

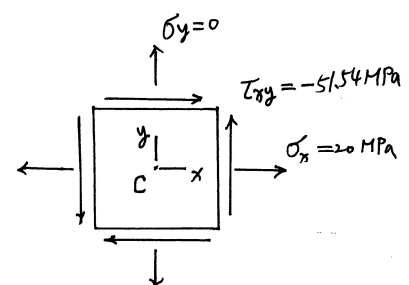


圖 a C 點應力元素

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = (76.92 \times 10^3)(-670\mu) = -51.54 \text{ MPa}$$

(4) (xy 面應力) → (內力) → (外力)

- 依據軸向應力及彎曲應力公式

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot e}{S}$$

或

$$20 = \frac{P}{1963.5} + \frac{P(12.5)}{12,272}$$

$$\Rightarrow P = 13,090 \text{ N}$$

- 依據扭轉應力公式

$$\tau_{xy} = -\frac{16T}{\pi d^3}$$

或

$$-51.54 = -\frac{16T}{\pi(50)^3}$$

$$\Rightarrow T = 1.265 \times 10^6 \text{ N-mm}$$

(5) (外力) → (內力) → (xz 面應力)

- 依據軸向應力公式

$$\sigma_{x,D} = \frac{P}{A} = \frac{13,090}{1963.5} = 6.67 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{z,D} = 0$$

- 依據扭轉應力公式

$$\tau_{zx,D} = -\tau_{xy} = 51.54 \text{ MPa}$$

(6) (xz 面應力) → (主應力)

- 依據主應力公式

$$\begin{aligned} \sigma_{P,D} &= \left(\frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \right)^2 + (\tau_{zx})^2} \\ &= \left(\frac{0 + 6.67}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 6.67}{2} \right)^2 + (51.54)^2} \\ &= 3.335 \pm 51.648 \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_{P1,D} = 55.0 \text{ MPa}, \sigma_{P2,D} = -48.3 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

(7) (外力) → (變位)

- 依據圓桿扭轉角公式

$$\phi = \frac{TL}{GJ} = \frac{(1.265 \times 10^6)(1 \times 10^3)}{(76.92 \times 10^3)(613,592)} = 0.0268 \text{ rad} \quad \blacktriangleleft$$

Ans : (a) D 點主應力

$$\sigma_{P1,D} = 55.0 \text{ MPa (拉)}, \sigma_{P2,D} = -48.3 \text{ MPa (壓)}$$

(b) 自由端之扭轉角

$$\phi = 0.0268 \text{ rad}$$

實力網站上提供高普考部份科目解答

<http://www.shi-li.com.tw/>

實力技師“題型班”含最新試題完整詳

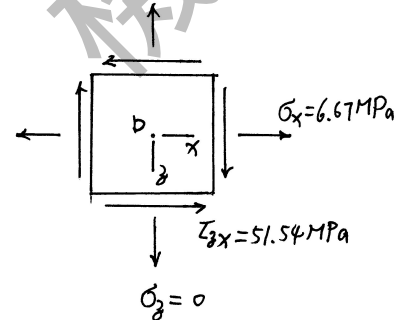
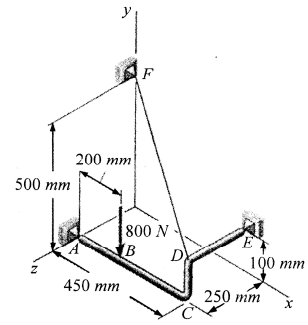


圖 b D 點應力元素

※本題請參考“實力材料力學精修教材下冊 P7-42 [G2.2-4]”

二、鋼管 $ABCDE$ ，是由 A 點及 E 點之球窩接頭 (ball and socket)，及纜索 DF 所支撐，如右圖所示。外力 800 N 作用於 B 點。求平衡時，纜索 DF 之張力大小。(略去鋼管 $ABCDE$ 之自重) (20 分)



【解題老師】許弘老師

• 101 年土木高考試題 •

問題剖析

- (1) 三維空間力平衡問題，本題因為 AE 點都是球窩支承，共有三個支承反力。但當力量不通過球窩支承 AE 連線時，將造成力矩無法平衡，這時就由 DF 纜索張力來提供力矩達成平衡。
- (2) 換言之，本題只要用 AE 軸之力矩平衡即可輕易求解。但因為 AE 軸是傾斜軸，所以應用向量計算比較方便。

參考解答

1. 由題目座標表示力與位置向量

(1) AE 軸單位向量

E 點座標 $(450, 100, 0)$ ； A 點座標 $(0, 0, 250)$

$$\vec{r}_{E/A} = (450 - 0)\vec{i} + (100 - 0)\vec{j} + (0 - 250)\vec{k} = 450\vec{i} + 100\vec{j} - 250\vec{k}$$

$$\vec{u}_{E/A} = \frac{\vec{r}_{E/A}}{|\vec{r}_{E/A}|} = \frac{450\vec{i} + 100\vec{j} - 250\vec{k}}{\sqrt{450^2 + 100^2 + (-250)^2}}$$

(2) DF 軸單位向量

D 點座標 $(450, 100, 250)$ ； F 點座標 $(0, 500, 0)$

$$\vec{r}_{F/D} = (0 - 450)\vec{i} + (500 - 100)\vec{j} + (0 - 250)\vec{k} = -450\vec{i} + 400\vec{j} - 250\vec{k}$$

$$\vec{u}_{F/D} = \frac{\vec{r}_{F/D}}{|\vec{r}_{F/D}|} = \frac{-450\vec{i} + 400\vec{j} - 250\vec{k}}{\sqrt{(-450)^2 + 400^2 + (-250)^2}}$$

(3) DF 纜索拉力向量

設 DF 纜索拉力為 T_{DF} 。 DF 纜索拉力向量

$$\vec{T}_{DF} = (T_{DF})\vec{u}_{F/D} = T_{DF} \frac{-450\vec{i} + 400\vec{j} - 250\vec{k}}{\sqrt{(-450)^2 + 400^2 + (-250)^2}}$$

2. 對 AE 軸取力矩

(1) 外力 800 N 對 AE 軸之力矩

$$\text{外力對「A 點」之力矩為 } (\vec{M}_1)_A = \vec{r}_{B/A} \times \vec{F}_1 = (200\vec{i}) \times (-800\vec{j}) = -160000\vec{k} \text{ N}\cdot\text{mm}$$

外力對「 AE 軸」之力矩純量為

$$\begin{aligned} (M_1)_{AE} &= (\vec{M}_1)_A \cdot \vec{u}_{E/A} = -160000\vec{k} \cdot \frac{450\vec{i} + 100\vec{j} - 250\vec{k}}{\sqrt{450^2 + 100^2 + (-250)^2}} \\ &= \frac{40000000}{\sqrt{450^2 + 100^2 + (-250)^2}} \text{ N}\cdot\text{mm} \end{aligned}$$

(2) DF 纜索拉力對 AE 軸之力矩

DF 纜索拉力對「 E 點」之力矩為

$$(\vec{M}_2)_E = \vec{r}_{D/E} \times \vec{T}_{DF} = (250\vec{k}) \times \left(T_{DF} \frac{-450\vec{i} + 400\vec{j} - 250\vec{k}}{\sqrt{(-450)^2 + 400^2 + (-250)^2}} \right)$$

$$= (250T_{DF}) \left(\frac{-450\vec{j} - 400\vec{i}}{\sqrt{(-450)^2 + 400^2 + (-250)^2}} \right) \text{N}\cdot\text{mm}。$$

DF 纜索拉力對「AE 軸」之力矩純量為

$$\begin{aligned} (M_2)_{AE} &= (\vec{M}_2)_E \cdot \vec{u}_{E/A} = (250T_{DF}) \left(\frac{-450\vec{j} - 400\vec{i}}{\sqrt{(-450)^2 + 400^2 + (-250)^2}} \right) \cdot \frac{450\vec{i} + 100\vec{j} - 250\vec{k}}{\sqrt{450^2 + 100^2 + (-250)^2}} \\ &= \frac{-56250000T_{DF}}{\sqrt{(-450)^2 + 400^2 + (-250)^2} \sqrt{450^2 + 100^2 + (-250)^2}} \text{N}\cdot\text{mm} \end{aligned}$$

3. 力矩需平衡反求 DF 纜索拉力大小

若不讓鋼管轉動，外力與 DF 纜索拉力對 AE 軸之力矩必須抵銷。

$$(M_1)_{AE} + (M_2)_{AE} = 0。$$

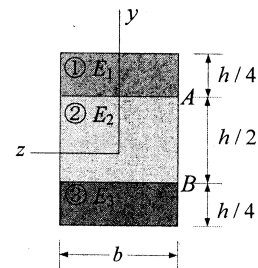
$$\Rightarrow \frac{40000000}{\sqrt{450^2 + 100^2 + (-250)^2}} + \frac{-56250000T_{DF}}{\sqrt{(-450)^2 + 400^2 + (-250)^2} \sqrt{450^2 + 100^2 + (-250)^2}} = 0。$$

$$\Rightarrow T_{DF} = \frac{40000000}{56250000} \sqrt{(-450)^2 + 400^2 + (-250)^2} = 463.588 \text{ N (拉力)}。$$

Ans : $T_{DF} = 463.588 \text{ N (拉力)}$ 。

※本題請參考“實力靜力學精修教材 P2-48 [例 2.18]”

三、右圖為複合梁之截面 $b = 100 \text{ mm}$ ， $h = 200 \text{ mm}$ ，此複合梁是由三種材料緊密黏接而成。材料①之楊氏模數 $E_1 = 120 \text{ GPa}$ ，材料②之楊氏模數 $E_2 = 30 \text{ GPa}$ ，材料③之楊氏模數 $E_3 = 240 \text{ GPa}$ ，此梁受到正彎矩（positive bending moment） $M_z = 6 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 作用，求交界面處（即 A 及 B 處）在 x 方向之正向應力（normal stress） σ_x 。
（註： x 方向為垂直於紙張的方向）（20 分）



【解題老師】林冠丞老師

• 101 年土木高考試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 材料性質： $E_1 = 120 \text{ GPa}$ ， $E_2 = 30 \text{ GPa}$ ， $E_3 = 240 \text{ GPa}$
- 幾何性質： $b = 100 \text{ mm}$ ， $h = 200 \text{ mm}$
- 內力： $M_z = 6 \text{ kN}\cdot\text{m}$

(2) 待求

- 應力： $\sigma_{x,A}$ ， $\sigma_{x,B}$

(3) 方法

- 轉換剖面法

(4) 思路

- （複合材料）→（單一材料）

參考解答

(1) 準備工作

- 計算剖面參數（圖 a）

$$n = \frac{E_1}{E_2} = \frac{120}{30} = 4$$

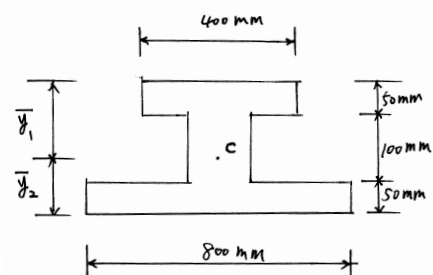


圖 a 轉換剖面

$$m = \frac{E_3}{E_2} = \frac{240}{3} = 8$$

$$\bar{y}_1 = \frac{(400 \times 50)(25) + (100 \times 100)(100) + (800 \times 50)(175)}{(400 \times 50) + (100 \times 100) + (800 \times 50)} = 121.43 \text{ mm}$$

$$\bar{y}_2 = 200 - \bar{y}_1 = 78.57 \text{ mm}$$

$$I_t = \frac{1}{3} \left[(400)(121.43)^3 - (300)(71.43)^3 + (800)(78.57)^3 - (700)(28.57)^3 \right]$$

$$= 326.19 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

(2) (複合材料) → (單一材料)

- 依據轉換剖面法及彎曲應力公式

$$\sigma_{x,A2} = \frac{M_z y_A}{I_t} = \frac{(6 \times 10^6)(121.43 - 50)}{(326.19 \times 10^6)} = 1.314 \text{ MPa (壓)} \quad \blacktriangleleft$$

$$\sigma_{x,A1} = n \cdot \sigma_{x,A2} = 4(1.314) = 5.256 \text{ MPa (壓)} \quad \blacktriangleleft$$

$$\sigma_{x,B2} = \frac{M_z y_B}{I_t} = \frac{(6 \times 10^6)(78.57 - 50)}{(326.19 \times 10^6)} = 0.526 \text{ MPa (拉)} \quad \blacktriangleleft$$

$$\sigma_{x,B3} = m \cdot \sigma_{x,B2} = 8(0.526) = 4.204 \text{ MPa (拉)} \quad \blacktriangleleft$$

Ans : (a) A 處材料① : $\sigma_{x,A1} = 5.256 \text{ MPa (壓)}$

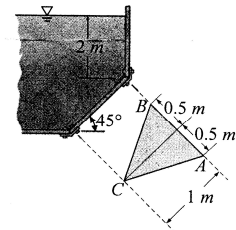
A 處材料② : $\sigma_{x,A2} = 1.314 \text{ MPa (壓)}$

(b) B 處材料② : $\sigma_{x,B2} = 0.526 \text{ MPa (拉)}$

B 處材料③ : $\sigma_{x,B3} = 4.204 \text{ MPa (拉)}$

※本題請參考“實力材料力學題型補充教材—P4-12 [例 4-10]”

四、右圖中，三角形鋼板 ABC 是用來密封水槽的開口。設水槽內水的密度 $\rho_w = 1 \text{ Mg/m}^3$ ，求水槽內的水作用在三角形鋼板 ABC 的合力大小。(20 分)



【解題老師】劉力老師

• 101 年土木高考試題 •

問題剖析

斜板上之靜水壓作用力 $F = \gamma h_c A = \gamma \times \text{形心之水深} \times \text{面積}$

參考解答

斜板上面積之靜水壓作用力

$$F = \gamma h_c A = \gamma \times \text{斜板上面積形心之水深} \times \text{面積}$$

其中 γ : 液體之比重量 (本題為水) = $\rho_w g$, g 為重力加速度, h_c 為斜板上面積形心之水深, A 為面積。

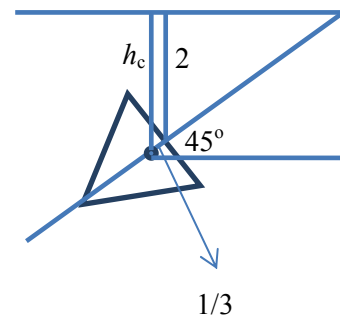
(1) $\rho_w = 1 \text{ Mg/m}^3 = 10^6 \text{ g/m}^3 = 10^3 \text{ Kg/m}^3$

(2) h_c 為斜板上面積形心之水深, 本題為三角形, 其形心位於近三角形底部之 1/3 高處, 又因斜板於水平面夾 45° , 故

$$h_c = (1 \cdot 1/3 \cdot \sin(45^\circ) + 2)$$

note

合力大小可利用形心之水深計算, 但是合力並非剛好作用於形心上。

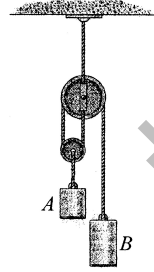


$$\begin{aligned}
 (3) F &= \gamma h_c A = \gamma \times \text{斜板上面積形心之水深} \times \text{面積} \\
 &= (1000 \times 9.81) \times (1/3 \times \sin 45^\circ + 2) \times (1 \times 1 \times 1/2) \\
 &= 10966 = 10.966 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Ans: $F = 10.966 \text{ kN}$

※本題請參考“實力流體力學講義—P2-11〔例 2-3〕”

五、如右圖所示之系統，圓柱 A 之質量為 m ，圓柱 B 之質量為 $3m$ ，此系統由靜止釋放，當圓柱 B 向下移動 Δs_B 之距離時，求圓柱 A 之速度 v_A 。(略去繩索及滑輪之重量)(20 分)



【解題老師】許弘老師

• 101 年土木高考試題 •

問題剖析

- (1) 這種僅由本身自重所驅動的運動都是「等」加速度運動。
- (2) 因為加速度為常數，系統又由靜止開始釋放，初始速度為零。依等加速度運動公式， $v^2 = v_0^2 + 2as$ ， $v_0 = 0$ ， $v = \sqrt{2as}$ 。所以要求圓柱移動一段距離 s 之後的速度，首先要知道圓柱的加速度是多少。
- (3) 滑輪組運動屬於「相依運動」，我們可以由許弘老師所介紹滑輪組運動的分析步驟，由尺寸標線的設定，繩長不變關係式之建立去微分求得 A、B 圓柱的加速度關係式。
- (4) 最後個別取出 A、B 圓柱的自由體圖與動力圖，利用牛頓運動方程式求出 A、B 圓柱的加速度值。但因為滑輪的重量不計，所以在滑輪自由體上的繩索拉力可用靜力平衡計算。

參考解答

1. 由相依運動建立 A、B 圓柱的加速度關係式

由圖(a)滑輪組運動關係圖，設定基準面於定滑輪中心，設定距離向「下」為正。所有會動的物體都要設定標線表示其可動性。

每一條繩子編寫一條繩長不變關係式，但與 y_A 、 y_D 、 y_B 無關的繩長不必編寫。注意纏繞於 D 動滑輪上繩子，其長度為

$$2y_D + y_B = L = \text{常數}。$$

$$\text{經過兩次微分，} 2\ddot{y}_D + \ddot{y}_B = 0 = 2a_D + a_B, \quad a_B = -2a_D。$$

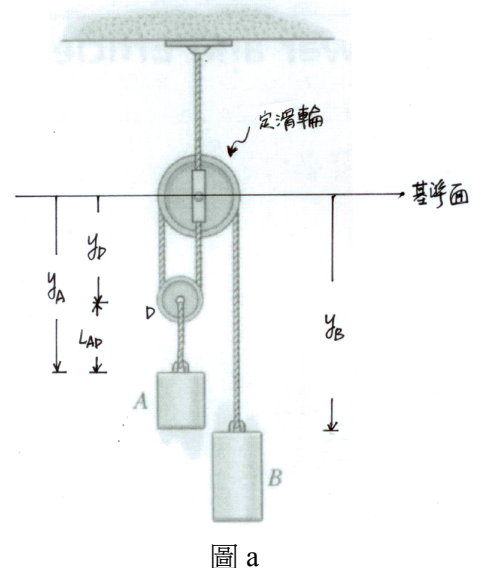
請注意 D 動滑輪與 A 圓柱之間的繩長 L_{AD} 為常數，亦即

$$y_A - y_D = L_{AD} = \text{常數，經過兩次微分。} \ddot{y}_A - \ddot{y}_D = 0 = a_A - a_D,$$

$$a_A = a_D。$$

$$\text{故 } a_B = -2a_D = -2a_A。$$

…(a)



提醒您～

技師報名日期：8/7~8/16

“一律採網路報名”

2. 由運動方程式計算 A、B 圓柱的加速度

(1) 計算繩索拉力

由圖(b)滑輪組自由體，設 AD 繩的拉力為 T_1 。因為滑輪的重量不計，所以在滑輪自由體上的繩索拉力可直接用靜力平衡計算。

D 滑輪自由體，兩邊繩索均分一半 $T_1/2$ 。C 滑輪自由體，依力矩平衡，因力臂都是滑輪半徑，故左右繩索拉力相同為 $T_1/2$ 。

(2) 由 A、B 圓柱的自由體圖與動力圖計算加速度

單獨取出 A、B 圓柱的自由體圖，並繪製動力圖如圖(c)所示。依牛頓運動方程式，注意向下為正。

$$[+\downarrow \Sigma F_y = ma_{Gy}] : mg - T_1 = ma_A \quad \dots(b)$$

$$[+\downarrow \Sigma F_y = ma_{Gy}] : 3mg - T_1/2 = 3ma_B \quad \dots(c)$$

有三個未知數 T_1 、 a_A 、 a_B ，聯立(a)(b)(c)式可解得

$$a_A = -\frac{5}{13}g ; a_B = \frac{10}{13}g ; T_1 = \frac{18}{13}mg$$

3. 由等加速度運動公式計算 A 圓柱的速度

(1)先求 B 圓柱向下移動 Δs_B B 圓柱本身的速度 v_B

因為加速度為常數，系統又由靜止開始釋放，初始速度為零。依等加速度運動公式 $v_0 = 0$ ， $v = \sqrt{2as}$ 。

$$\text{故 } v_B = \sqrt{2a_B \Delta s_B} = \sqrt{\frac{20}{13}g \Delta s_B} = 3.88\sqrt{\Delta s_B} \quad (\text{正值表示向下})$$

(2)再求 B 圓柱向下移動 Δs_B A 圓柱的速度 v_A

由繩長不變關係式 $2y_D + y_B = L = \text{常數}$ ，微分一次可知

$$v_B = -2v_D = -2v_A$$

$$v_A = -\frac{1}{2}v_B = -\sqrt{\frac{5}{13}g \Delta s_B} = -1.942\sqrt{\Delta s_B} \quad (\text{負值表示向上})$$

Ans : $v_A = 1.942\sqrt{\Delta s_B}$ (↑)

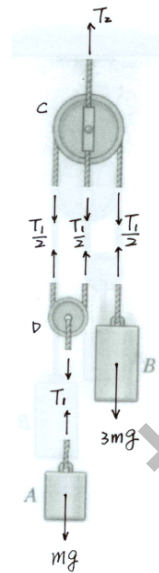


圖 b

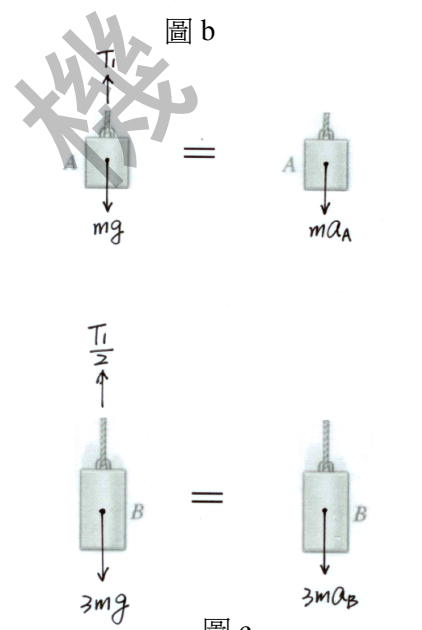


圖 c

※本題請參考“實力工程動力學精修教材－〔P3-23〕”

十年後您想擁有什麼？現在您又該做什麼？一切由您自己做決定!!
 萬物皆漲的時代下~如何“飆漲”您的“土木人生”
 實力專案幫您實踐夢想，敬請把握“技師考試最後舊制”
活動期限至 101/08/31 止